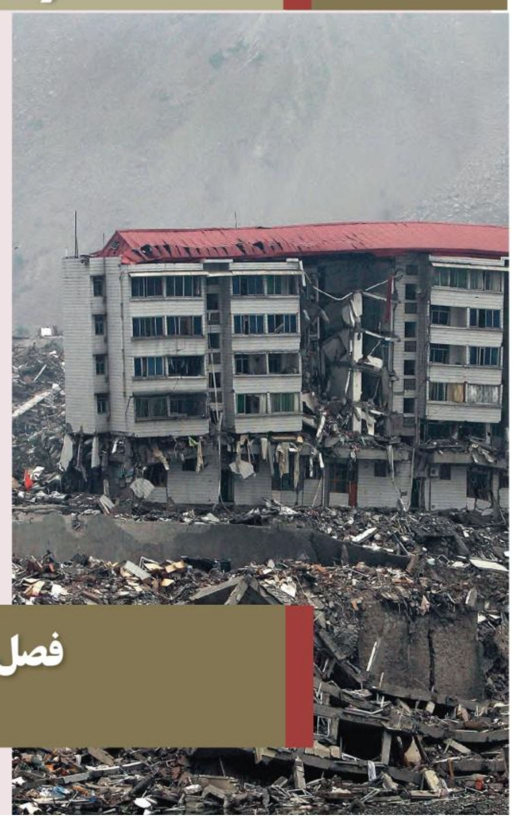
حرکت‌شناسی در دوبعد

فصل ۱

دینامیک

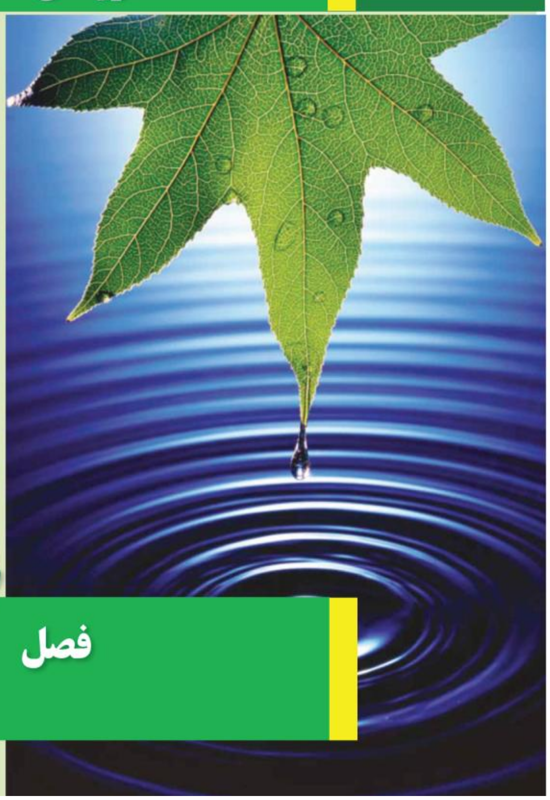
فصل ۲

حرکت نوسانی



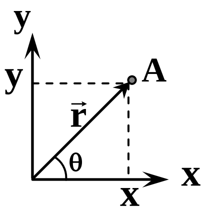
فصل ۳

موج‌های مکانیکی



فصل ۴

بردار مکان: بردار مکان یک نقطه ، برداری است که مبداء مختصات را به مکان آن نقطه متصل می‌کند .



$\vec{r}=\vec{x}+\vec{y}=x\vec{i}+y\vec{j}$ $\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$

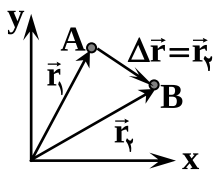
$x=r\cos\theta\ , \ y=r\sin\theta$ $\qquad \tan\theta=\dfrac{y}{x}$

اگر مولفه‌های بردار مکان تابعی از زمان باشند، بردار مکان به صورت $\vec{r}=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}$ در می‌آید.

اگر مبداء مختصات ($o\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$) را به نقطه‌ی $o'\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ ببریم ،بردار مکان هر نقطه $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ به صورت زیر در می‌آید :

$$\vec{r}'=(x-\alpha)\vec{i}+(y-\beta)\vec{j}\Rightarrow r'=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\ ,\tan\theta'=\frac{y-\beta}{x-\alpha}$$

بردار جابه‌جایی: برداری است که مبداء حرکت را به مقصد وصل می‌کند . بردار جابه‌جایی همان تفاضل دو بردار است . (تفاضل بردار $\vec{r}_1$ از بردار $\vec{r}_2$ برداری است که انتهای بردار $\vec{r}_1$ را به بردار $\vec{r}_2$ وصل می‌کند .) بردار جابه‌جایی تنها کوتاه‌ترین فاصله بین شروع تا پایان حرکت را مشخص کرده و اطلاعی در باره‌ی مسیر حرکت به ما نمی‌دهد .



$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$

اندازه‌ی بردار جابه‌جایی همان طول پاره خط **AB** است .

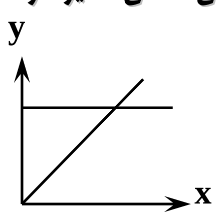
$$|\Delta\vec{r}|=|\vec{r}_2-\vec{r}_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ ,\ \tan\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

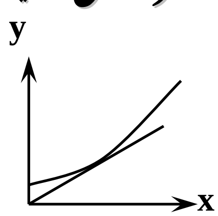
اگر مبداء مختصات را از $o(0,0)$ به نقطهٔ $o'(\alpha,\beta)$ منتقل کنیم بردار مکان نقطهٔ $A(x,y)$ به‌صورت $A'(x-\alpha,y-\beta)$ در می‌آید . در انتقال مبداء مختصات ، طول و جهت بردارهای مکان تغییر کرده ولی بردار جابه‌جایی تغییر نمی‌کند .

معادله‌ی مسیر حرکت: دیدیم که بردار مکان حرکت هر ذره دارای دو مولفهٔ x و y است . اگر زمان t را از این دو مولفه حذف کنیم ، معادلهٔ مسیر حرکت بدست می‌آید .

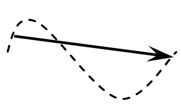
در مواردی که دو متحرک به یک‌دیگر می‌رسند به صورت زیر عمل می‌کنیم :

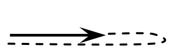
در لحظه‌ای که قرار است دو متحرک به هم برسند، باید مختصات نقطه‌ی برخورد در معادله‌ی مسیر حرکت دو متحرک صدق کند. یعنی منحنی مسیر حرکت دو متحرک در آن نقطه یک‌دیگر را قطع کرده یا بر هم مماس‌اند .



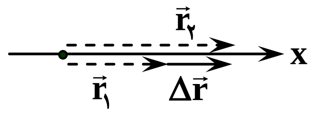


جابه‌جایی (مسافت طی شده در جهت خاص) یک کمیت برداری و مسافت یک کمیت نرده‌ای است . در مسیرهای خمیده جابه‌جایی همواره از مسافت طی شده کم‌تر است ، در مسیر خط راست اگر متحرک تغییر جهت ندهد جابه‌جایی و مسافت برابر یکدیگرند ، و اگر تغییر جهت بدهد جابه‌جایی از مسافت کوچک‌تر می‌شود .





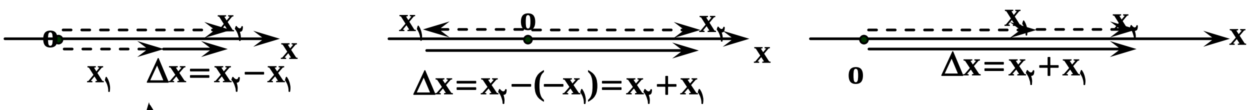
در حرکت روی خط راست ، چون بردارهای مکان و تغییر مکان (جابه‌جایی) بر یکدیگر و بر مسیر حرکت منطبق هستند ، پس می‌توان به جای بردار از مقادیر جبری استفاده نمود . برای متحرکی که در سمت راست مبداء است $x>0$ و برای متحرکی که در سمت چپ مبداء قرار دارد $x<0$ است .

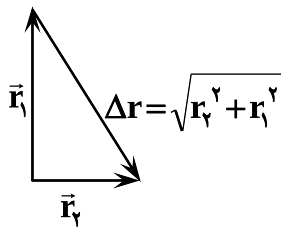


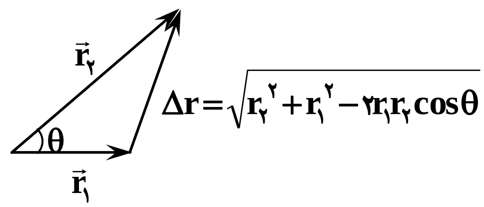
$$\Delta\vec r = \vec r_2 - \vec r_1$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

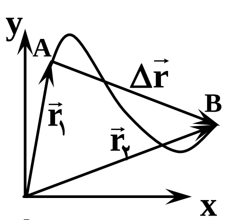
با توجه به نحوهٔ حرکت ، جابه‌جایی را می‌توان از روابط مختلفی بدست آورد :







سرعت متوسط : جابه‌جایی در واحد زمان را سرعت متوسط گویند . سرعت یک کمیت برداری می‌باشد . در شکل زیر مسیر حرکت ذرّه‌ای در صفحه‌ی xoy نشان داده شده است ، که در لحظهٔ t_1 در نقطهٔ A و در لحظهٔ t_2 در نقطهٔ B قرار دارد . بردار مکان این نقاط به ترتیب $\vec r_1$ و $\vec r_2$ می‌باشد . بردار جابه‌جایی برداری است که این دو نقطه را به‌هم متصل می‌کند . طبق تعریف سرعت متوسط برابر است با :



سرعت متوسط

$$\bar{\vec v} = \frac{\Delta\vec r}{\Delta t} = \frac{\vec r_2 - \vec r_1}{t_2 - t_1} = \frac{(x_2 - x_1)\vec i + (y_2 - y_1)\vec j}{t_2 - t_1}$$

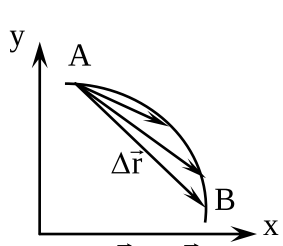
جابجایی
زمان

واحد سرعت $\frac{m}{s}$ یا $\frac{km}{h}$ است . ***سرعت متوسط اطلاع دقیقی از نوع حرکت به ما نمی‌دهد.***

$$\frac{km}{h} \xrightarrow{\div 3/6} \frac{m}{s}$$

چون $\frac{1}{\Delta t}$ عدد مثبتی است ، پس بردار سرعت هم جهت با بردار جابه‌جایی است . اندازهٔ سرعت متوسط برابر است با :

$$\bar{\vec v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec i + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec j = \bar v_x \vec i + \bar v_y \vec j \Rightarrow \bar v = \sqrt{\bar v_x^2 + \bar v_y^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{\bar v_y}{\bar v_x}$$



در شکل روبه‌رو مسیر حرکت ذرّه‌ای که در صفحهٔ xoy در حرکت است نشان داده شده است . هر چه‌قدر بازه‌ی زمانی Δt کوچک‌تر باشد ، تفاوت بین مسیر حرکت و جابه‌جایی کم‌تر شده و در حدّ ، بردار جابه‌جایی بر مسیر حرکت مماس می‌شود ، ***در نتیجه بردار سرعت نیز بر مسیر حرکت مماس است.***

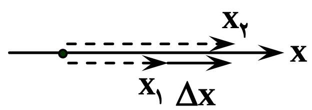
$$\vec v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec r}{\Delta t} = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec i + \frac{dy}{dt}\vec j$$

اگر از بردار جابه‌جایی بر حسب زمان مشتق بگیریم ، بردار سرعت لحظه‌ای بدست می‌آید . وقتی از تابعی مشتق گرفته می‌شود ، شیب خط مماس بر نمودار بدست می‌آید . اندازه بردارهای سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به صورت زیر بدست می‌آید :

$$\vec v = \frac{dx}{dt}\vec i + \frac{dy}{dt}\vec j = v_x\vec i + v_y\vec j \Rightarrow \vec v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

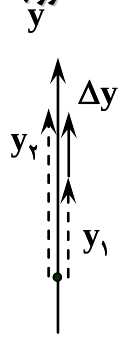
بردار سرعت بر مسیر حرکت مماس است. اگر مسیر حرکت خط راست باشد، بردار سرعت بر مسیر حرکت منطبق شده و شیب آن برابر شیب خط راست است.

در حرکت روی خط راست ، چون بردارهای مکان و جابه‌جایی و سرعت بر یک‌دیگر و بر مسیر حرکت منطبق‌اند ، می‌توان بـه جـای بـردار ، از مقادیر جبری استفاده نمود . اگر سرعت در جهت محور باشد علامت آن مثبت و اگر در خلاف محور باشد علامت آن منفی است .



$$\bar{v}_x=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$$

$$v_x=\mathrm{Lim}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$



$$\bar{v}_y=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}$$

$$v_y=\mathrm{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}$$

$$\vec{\bar{v}}=\bar{v}_x\vec{i}+\bar{v}_y\vec{j}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

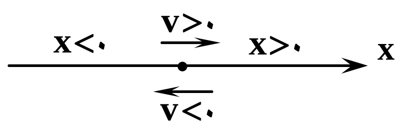
$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}$$

حرکت یکنواخت: به حرکتی که در هر بازهٔ زمانی دلخواه سرعت ثابت بوده و سرعت متوسط برابر سرعت لحظه‌ای باشد، یکنواخت گفته می‌شود . در حرکت با سرعت ثابت در زمان‌های مساوی مسافت‌های مساوی طی می‌شود .

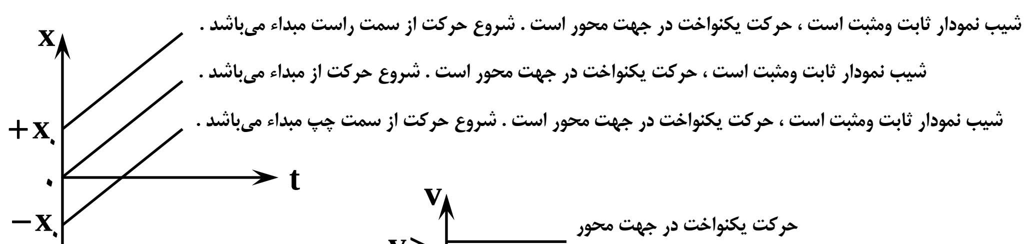
معادله‌ی حرکت یکنواخت : به صورت تابع خطی زیر بیان می‌شود :

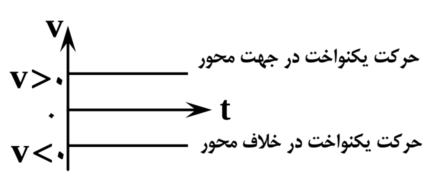
$$v_x=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x-x_0}{t-0}\Rightarrow x-x_0=v_x t\Rightarrow x=v_x t+x_0$$

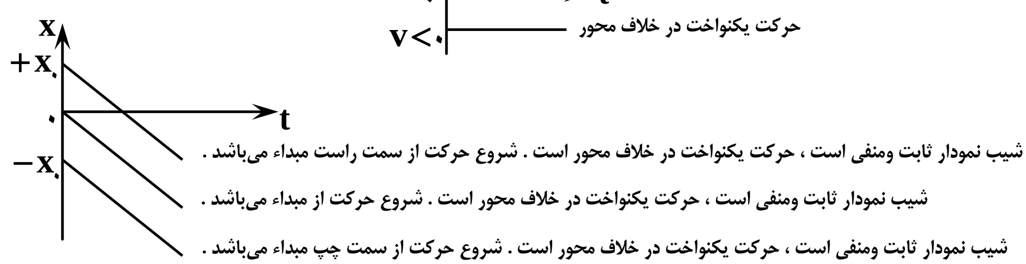
سمت راست مبداء $x>0$ ، سمت چپ مبداء $x<0$ ، حرکت در جهت محور $v_x>0$ ، حرکت در خلاف جهت محور $v_x<0$



شیب نمودار مکان- زمان در حرکت یکنواخت بر روی خط راست ، برابر سرعت می‌باشد . اگر شیب مثبت باشد ، سرعت مثبت بوده و حرکـت در جهت محور می‌باشد ، و اگر شیب این نمودار منفی باشد ، سرعت منفی بوده و حرکت در خلاف محور است.







وقتی گفته می‌شود که دو متحرک به هم می‌رسند، معادله‌ی مکان دو متحرک را نسبت به یک مبداء دلخواه نوشته و برابر یکدیگر قرار دهیم . در این لحظه نمودارهای مکان زمان دو متحرک یک دیگر را قطع کرده یا بر هم مماس می‌باشند.

هنگامی که دو متحرک هم زمان شروع به حرکت می‌کنند ، برای محاسبهٔ مدت زمانی که طول می‌کشد تا دو متحرک به یک‌دیگر برسند ، مـی-توان معادلهٔ حرکت یکی را نسبت به دیگری نوشت .

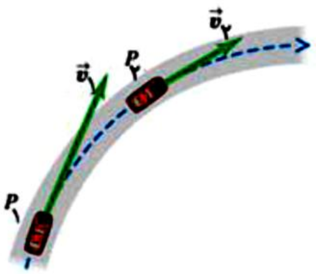
$$\left.\begin{array}{l} x_1=v_1t+x_{01} \\ x_2=v_2t+x_{02} \end{array}\right\} \Rightarrow x_2-x_1=(v_2-v_1)t+(x_{02}-x_{01})$$

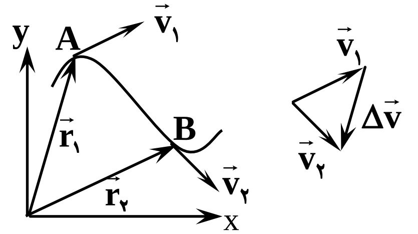
وقتی دو متحرک به یک‌دیگر می‌رسند :

$$\xrightarrow{x_1=x_2} 0=(v_2-v_1)t+(x_{02}-x_{01}) \Rightarrow t=\frac{x_{01}-x_{02}}{v_2-v_1}$$

شتاب متوسط : **تغییرات سرعت در واحد زمان را شتاب متوسط گویند . شتاب یک کمیت برداری بوده و واحد آن $\frac{m}{s^2}$ می‌باشد. در شکل زیر مسیر حرکت ذرّه‌ای در صفحه‌ی xoy نشان داده شده است ، که در لحظهٔ t_1 در نقطهٔ A و در لحظهٔ t_2 در نقطهٔ B قرار دارد . بردار سرعت که بر مسیر حرکت مماس بوده و در این نقاط به ترتیب $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ می‌باشد . طبق تعریف شتاب متوسط می‌توان نوشت :**

$$\vec{\bar{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}=\frac{(v_{2x}-v_{1x})\vec{i}+(v_{2y}-v_{1y})\vec{j}}{t_2-t_1}=\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j}=\bar{a}_x\vec{i}+\bar{a}_y\vec{j}\ ,\ \bar{a}=\sqrt{\bar{a}^2{}_x+\bar{a}^2{}_y}\ ,\ \tan\theta=\frac{\bar{a}_y}{\bar{a}_x}$$





چون $\frac{1}{\Delta t}$ عدد مثبتی است ، ***در نتیجه بردار شتاب هم جهت با بردار تغییر سرعت است.***

بردار سرعت به ۳ صورت تغییر می‌کنند :

۱- اندازه تغییر کرده جهت سرعت ثابت بماند . (حرکت روی خط راست)

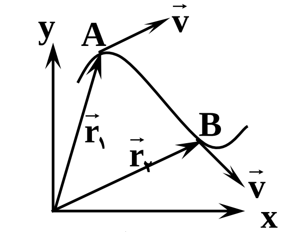
۲- اندازه ثابت مانده جهت سرعت عوض شود . (حرکت دایره‌ای یکنواخت)

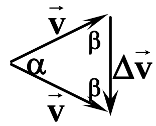
۳- اندازه و جهت سرعت تغییر کند . (حرکت شتابدار در مسیر خمیده)

هرچه قدر بازهٔ زمانی Δt کوچک‌تر باشد ، تفاوت بین شتاب متوسط و لحظه‌ای کم‌تر شده و در حدّ ، برابر یک‌دیگـر مـی‌شـوند. اگـر از بـردار سرعت بر حسب زمان مشتق بگیریم ، بردار شتاب لحظه‌ای بدست می‌آید . وقتی از تابعی مشتق گرفته می‌شود، شیب خط مماس بر نمودار آن تابع بدست می‌آید .

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}\quad,\quad a=\sqrt{a^2{}_x+a^2{}_y}\quad,\quad \tan\theta=\frac{a_y}{a_x}$$

در حرکت با بزرگی سرعت ثابت روی مسیر خمیده، وقتی $\Delta t\to 0$ ، بردار شتاب (تغییرات سرعت) بر بردار سرعت عمود است.

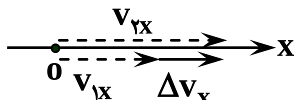




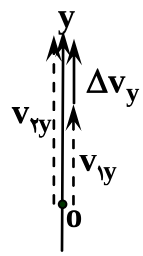
$$\alpha+2\beta=180^\circ \xrightarrow{\Delta t\to 0\ \Rightarrow\ \alpha\to 0} 2\beta=180^\circ \Rightarrow \beta=90^\circ$$

بردار تغییر سرعت بر بردار سرعت عمود است ، پس بردار شتاب نیز بر بردار سرعت عمود می‌باشد .

در حرکت روی خط راست ، بردارهای سرعت و تغییرات سرعت و در نتیجه بردار شتاب بر یک‌دیگر و بر مسیر حرکت منطبق می‌باشند ، پس می‌توان به جای بردار از مقادیر جبری استفاده نمود . اگر بردار تغییرات سرعت در جهت محور باشد ، علامت شتاب مثبت و اگر بردار تغییرات سرعت در خلاف محور باشد ، علامت شتاب منفی است .



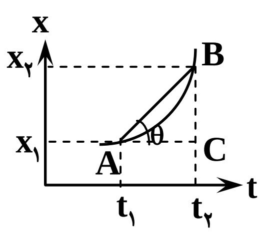
$$\begin{cases}\bar{a}_x=\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}=\dfrac{v_{2x}-v_{1x}}{t_2-t_1}\\ a_x=\mathrm{Lim}\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}=\dfrac{dv_x}{dt}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\bar{a}_y=\dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}=\dfrac{v_{2y}-v_{1y}}{t_2-t_1}\\ a_y=\mathrm{Lim}\dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}=\dfrac{dv_y}{dt}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{\vec{a}}=\bar{a}_x\vec{i}+\bar{a}_y\vec{j}=\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i}+\dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j}\\ \vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}=\dfrac{dv_x}{dt}\vec{i}+\dfrac{dv_y}{dt}\vec{j}\end{cases}$$

نمودار مکان ـ زمان: با استفاده از این نمودار می‌توان در هر لحظه مکان متحرک را مشخص نمود.در این نمودار محور قائم نشان دهندهٔ مکان و محور افقی نشان دهندهٔ زمان می‌باشد . شیب خطی که دو نقطه از این نمودار را به هم متصل می‌کند ، برابر سرعت متوسط است .



AB شیب خط $\tan\alpha=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\bar{v}_x$

اگر شیب خطی که دو نقطه از این نمودار را به هم وصل می‌کند ، مثبت باشد $(\tan\theta>0)$ ، سرعت مثبت بوده $(v>0)$ حرکت در جهت محور است. اگر شیب منفی باشد $(\tan\theta<0)$ سرعت منفی بوده $(v<0)$ و حرکت در خلاف جهت محور است .

هر چه‌قدر بازهٔ زمانی کوچک‌تر باشد تفاوت بین کمان AB و خط راست AB کم‌تر شده و در حدّ ، خط راست AB در نقطه‌ی A بر نمودار مماس می‌گردد . شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان برابر سرعت لحظه‌ای است .

$$v=\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{Lim}}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$

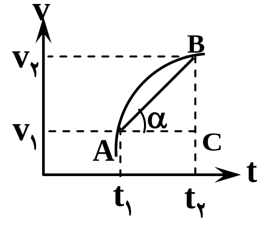
طبق تعریف سرعت لحظه‌ای برابر است با : ۱- شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان

۲- حد سرعت متوسط وقتی که $\Delta t\to 0$

۳- سرعت متحرک در هر لحظه از مسیر حرکت

٤- مشتق معادلهٔ مکان نسبت به زمان

نمودار سرعت-زمان : با استفاده از این نمودار می‌توان در هر لحظه سرعت متحرک را محاسبه نمود . در این نمودار محور قائم نشان دهنده‌ی سرعت و محور قائم نشان دهندهٔ زمان است . در نمودار سرعت- زمان شکل زیر ، متحرک در لحظات t_1 و t_2 در نقاط A و B دارای سرعت v_1 و v_2 می‌باشد . *شیب خط راستی که دو نقطه از این نمودار را به هم وصل می‌کند، برابر شتاب متوسط است.*



$$\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\bar{a}$$

اگر شیب این نمودار مثبت باشد ، شتاب مثبت است و اگر شیب این نمودار منفی باشد ، شتاب منفی است .

هر چه‌قدر بازهٔ زمانی Δt کوچک‌تر باشد تفاوت بین کمان AB و خط راست AB کم‌تر شده و در حدّ ، خط راست AB در نقطهٔ A بر نمـودار مماس می‌گردد . ***شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان برابر شتاب لحظه‌ای است.***

$$a=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

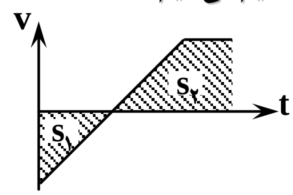
طبق تعریف شتاب لحظه‌ای برابر است با : ۱- شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان

۲- حد شتاب متوسط وقتی که $\Delta t\to ۰$

۳- شتاب متحرک در هر لحظه از مسیر حرکت

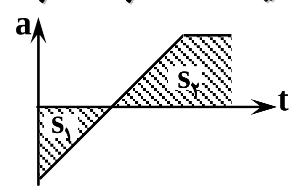
٤- مشتق معادلهٔ سرعت نسبت به زمان

سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان برابر جابه‌جایی است . اگر سطح مذبور بالای محور زمان باشد ، علامت جابه‌جایی مثبت است. اگر سطح مذبور زیر محور زمان باشد ، علامت جابه‌جایی منفی است . مجموع قدر مطلق جابه‌جایی‌ها برابر مسافت طی شده است . برای محاسبه‌ی سـرعت متوسط از روی نمودار سرعت ـ زمان ، مقدار جابه‌جایی را از سطح زیر نمودار بدست آورده بر زمان جابه‌جایی تقسیم می‌کنیم .



$\underset{\text{جابجایی}}{\Delta x}=S_۱+S_۲$ $\qquad$ $\underset{\text{مسافت}}{x}=|S_۱|+|S_۲|$

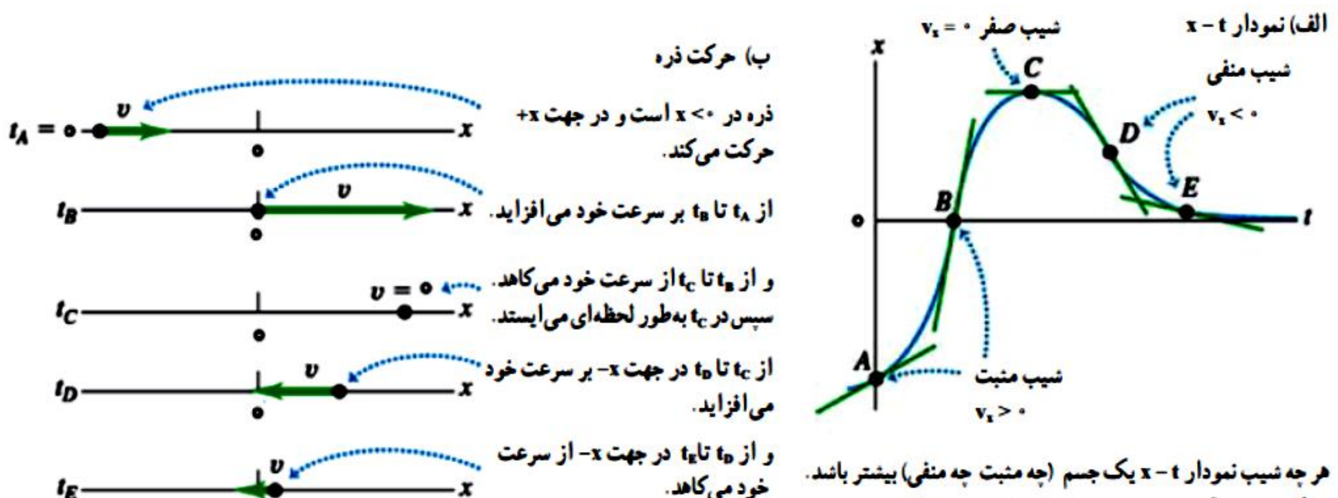
سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان برابر تغییرات سرعت است. اگر محور قائم را در محور افقی ضرب کنیم ، کمیت فیزیکی بدست آمده سطح زیر آن نمودار می‌باشد. سطح بالای محور زمان مثبت و سطح زیر محور زمان منفی است.



$$S_{a-t}=a\Delta t \xrightarrow{a=\frac{\Delta v}{\Delta t}} S_{a-t}=\Delta v \Rightarrow S_۱=\Delta v_۱<۰ \ , \ S_۲=\Delta v_۲>۰$$

یافتن سرعت از روی نمودار $x-t$:

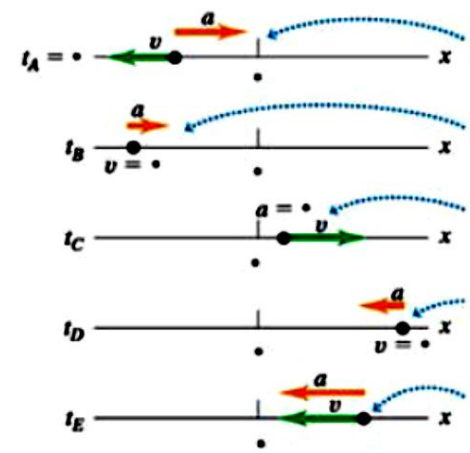
سرعت لحظه‌ای در هر نقطه برابر شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ است . بسته به این‌که شیب خط مماس به چـه نحـوی باشـد ، سـرعت لحظه‌ای می‌تواند مثبت ، صفر ، منفی باشد . در شکل زیر حرکت یک ذرّه ترسیم شده است .



هر چه شیب نمودار $x-t$ یک جسم (چه مثبت چه منفی) بیشتر باشد. بزرگی سرعت آن در جهت x مثبت یا منفی بیشتر خواهد بود.

یافتن شتاب از روی نمودار v−t :

شتاب لحظه‌ای در هر نقطه برابر شیب خط مماس بر نمودار v−t است . بسته به این‌که شیب خط مماس به چه نحوی باشد ، شتاب لحظه‌ای می‌تواند مثبت ، صفر ، منفی باشد . در شکل زیر حرکت یک ذرّه ترسیم شده است .



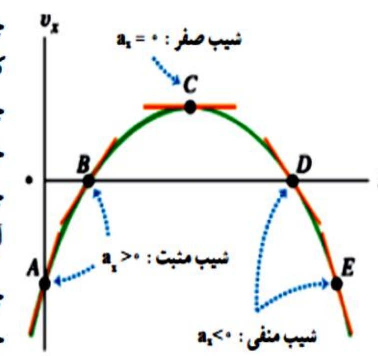
جسم در $x<0$ و در حرکت در جهت $-x$ ($v_x<0$) و در حال کاستن از سرعت خود است (v_x و a_x دارای علامت مخالف).

جسم در $x<0$ به‌طور لحظه‌ای ساکن است ($v_x=0$) و در آستانهٔ حرکت در جهت $+x$ است ($a_x>0$).

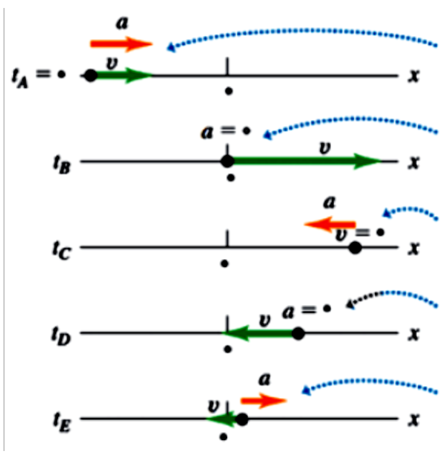
جسم در $x>0$ و در حرکت در جهت $+x$ ($v_x>0$) است و سرعت آن به‌طور لحظه‌ای بدون تغییر است ($a_x=0$).

جسم در $x>0$ به‌طور لحظه‌ای ساکن است ($v_x=0$) و در آستانهٔ حرکت در جهت $-x$ است ($a_x<0$).

جسم در $x>0$ و در حرکت در جهت $-x$ ($v_x<0$) و در حال افزایش سرعت است (v_x و a_x هم علامت‌اند).



یافتن شتاب از روی نمودار x−t :



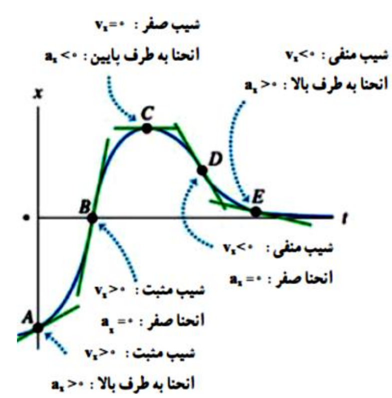
جسم در $x<0$ در حال حرکت در جهت $+x$ ($v_x>0$) با سرعت رو به افزایش (v_x و a_x هم علامت).

جسم در $x=0$ در حال حرکت در جهت $+x$ ($v_x>0$) سرعت به‌طور لحظه‌ای بدون تغییر ($a_x=0$).

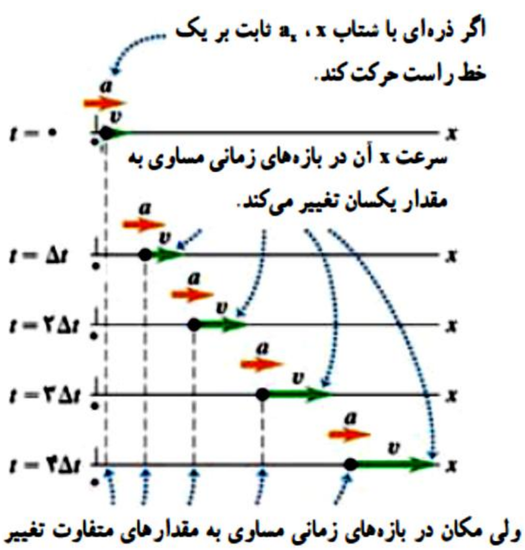
جسم در $x>0$، به‌طور لحظه‌ای ساکن ($v_x=0$) و در آستانهٔ حرکت در جهت $-x$ ($a_x<0$).

جسم در $x>0$ در حال حرکت در جهت $-x$ ($v_x<0$)؛ سرعت به‌طور لحظه‌ای بدون تغییر ($a_x=0$).

جسم در $x>0$ در حال حرکت در جهت $-x$ ($v_x<0$) با سرعت رو به کاهش (v_x و a_x با علامت‌های مخالف).

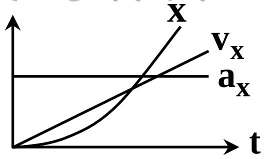


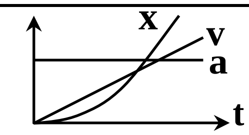
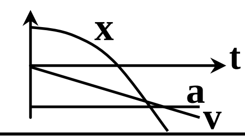
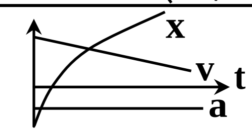
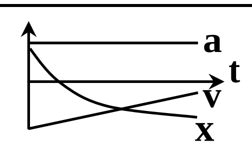
ساده‌ترین نوع حرکت شتابدار ، حرکت روی خط راست با شتاب ثابت است . نمودار روبه‌رو می‌تواند مروری مناسب بر مفاهیم این حرکت باشد . این شکل نمودار حرکتی است که مکان ، سرعت و شتاب را برای ذرّه‌ای که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، را نشان می‌دهد .



حرکت با شتاب ثابت : به حرکتی گفته می‌شود که در هر بازهٔ زمانی دلخواه شتاب ثابت بوده و شتاب لحظه‌ای برابر شتاب متوسط باشد .

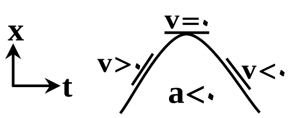
$$\underbrace{x \propto t^{2}}_{\text{سهمی}} \Rightarrow \underbrace{v_x = \frac{dx}{dt} \propto t^{1}}_{\text{خط راست با شیب ثابت}} \Rightarrow \underbrace{a_x = \frac{dv}{dt} \propto t^{0}}_{\text{خط راست با شیب صفر}}$$



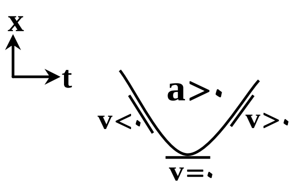
سرعت و شتاب هم علامت باشند	سرعت جسم رو به افزایش است	$v>0 , a>0$	سرعت مثبت ، مثبت‌تر شده (بزرگی سرعت رو به افزایش) حرکت در جهت محور است .	
		$v<0 , a<0$	سرعت منفی ، منفی‌تر شده (بزرگی سرعت رو به افزایش) حرکت در خلاف محور است .	
سرعت و شتاب با علامت مخالف باشند	سرعت جسم رو به کاهش است	$v>0 , a<0$	سرعت مثبت ، کم‌تر شده (بزرگی سرعت رو به کاهش) حرکت در جهت محور است .	
		$v<0 , a>0$	سرعت منفی ، کم‌تر منفی شده (بزرگی سرعت رو به کاهش) حرکت در خلاف جهت محور است .	

برای تعیین علامت شتاب از روی نمودار مکان- زمان به صورت زیر عمل می‌کنیم :

اگر در نمودار مکان- زمان جهت تقعر به طرف پایین باشد ، علامت شتاب منفی است .



اگر در نمودار مکان- زمان جهت تقعر به طرف بالا باشد ، علامت شتاب مثبت است .



معادلات حرکت شتابدار با شتاب ثابت روی خط راست

اگر شتاب a_x و سرعت اولیه v_{0x} و سرعت نهایی v_x و زمان حرکت t و سرعت متوسط $\bar{v}_x$ باشد ، معادلات حرکت با شتاب ثابت برابر است با:

معادلهٔ حرکت	$x=\frac{1}{2}a_x t^2+v_{0x}t+x_0$	معادلهٔ سرعت	$v_x=\frac{dx}{dt}=a_x t+v_{0x}$
معادلهٔ مستقل از زمان	$v_x^2-v_{0x}^2=2a_x(x-x_0)$	معادلهٔ مستقل از شتاب	$x-x_0=\frac{v_x+v_{0x}}{2}t$
سرعت متوسط در بازهٔ زمانی 0 تا t_1	$\bar{v}_x=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{v_x+v_{0x}}{2}=\frac{1}{2}a_x t+v_{0x}$		
سرعت متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2	$\bar{v}_x=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{v_{2x}+v_{1x}}{2}=\frac{1}{2}a_x(t_2-t_1)+v_{1x}\ ,\ v_{1x}=a_x t_1+v_{0x}$		

هنگام استفاده از معادلات حرکت به علامت مکان و سرعت و شتاب توجه داشته باشید . اگر متحرک سمت راست مبداء است $x>0$ و اگر حرکت در جهت محور است $v_x>0$ و اگر سرعت رو به افزایش است (بردار تغییر سرعت در جهت محور) $a_x>0$ می‌باشد .

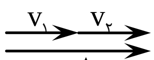
اتومبیلی که با سرعت در راستای محور x در حرکت است ، در اثر نیروی ترمز ، سرعت خود را کاهش داده تا بایستد . مسافت طی شده (x توقف) و مدت زمانی که طول می‌کشد تا متوقف شود (t توقف) ، به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x x \xrightarrow[v_x=0]{a_x<0} -v_{0x}^2 = -2a_x x \Rightarrow \boxed{x_{\text{توقف}} = \frac{v_{0x}^2}{2a_x}}$$ (طول خط ترمز)

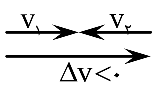
$$v_x = a_x + v_{0x} \xrightarrow[v_x=0]{a_x<0} 0 = -a_x + v_{0x} \Rightarrow \boxed{t_{\text{توقف}} = \frac{v_{0x}}{a_x}}$$

زمان عکس العمل: اتومبیلی با سرعت v در حرکت است ، از لحظه‌ای که راننده مانعی را مشاهده کرده تا لحظه‌ای که راننده ترمز کند ، مدت زمان کوتاهی سپری می‌شود که به آن زمان عکس العمل گویند . در این بازۀ زمانی که راننده پدال گاز را رها کرده ، سرعت اتومبیل مقدار ثابت v می‌باشد .

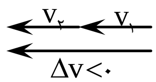
تعیین نوع حرکت شتابدار : اگر سرعت و شتاب هم علامت باشند ، حرکت شتابدار تند شونده است ($av>0$) اگر سرعت و شتاب مختلف العلامه باشند ، حرکت شتابدار کند شونده است . ($av<0$)



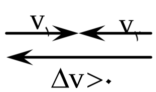
متحرکی که در جهت محور حرکت می‌کند ($v>0$) سرعتش را افزایش دهد . $\Delta v>0 \to a>0$ (تند شونده)



متحرکی که در جهت محور حرکت می‌کند ($v>0$) سرعتش را کاهش دهد . $\Delta v<0 \to a<0$ (کند شونده)



متحرکی که در خلاف محور حرکت می‌کند ($v<0$) سرعتش را افزایش دهد . $\Delta v<0 \to a<0$ (تند شونده)



متحرکی که در خلاف محور حرکت می‌کند ($v<0$) سرعتش را کاهش دهد . $\Delta v>0 \to a>0$ (کند شونده)

در لحظه‌ی شروع حرکت بردار سرعت و شتاب هم جهت بوده و حرکت شتابدار تند شونده است .

در لحظه‌ی ترمز بردار سرعت و شتاب در خلاف جهت یکدیگر بوده و حرکت شتابدار کند شونده است .

تعیین نوع حرکت از روی معادله‌ی حرکت :

۱- اگر معادلۀ حرکت نسبت به زمان درجۀ اوّل باشد ، سرعت ثابت بوده و حرکت یکنواخت است .

$$x \propto t^1 \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} \propto t^0$$

۲- اگر معادلۀ حرکت نسبت به زمان درجۀ دوّم باشد ، شتاب ثابت بوده و حرکت با شتاب ثابت انجام شده است .

$$x \propto t^2 \Rightarrow v_x \propto t^1 \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} \propto t^0$$

۳ - اگر معادلۀ حرکت نسبت به زمان درجۀ سه به بالا باشد ، حرکت شتاب‌دار با شتاب متغیر است .

$$x \propto t^3 \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} \propto t^2 \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} \propto t^1$$

تعیین نوع حرکت شتاب‌دار از روی معادله‌ی حرکت :

اگر معادلۀ حرکت با شتاب ثابت را به صورت تابع درجۀ دوّم $x=At^2+Bt+C$ در نظر بگیریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2At+B = 0 \Rightarrow t = \frac{-B}{2A} \;,\; a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2A$$

در این لحظه سرعت صفر بوده ولی شتاب مخالف صفر است . این لحظه را *لحظه‌ی تغییر جهت* گویند .

اگر زمان $t>-\frac{B}{2A}$ باشد ، سرعت و شتاب هم علامت بوده و حرکت تند شونده است . $(av>0)$

اگر زمان $t<-\frac{B}{2A}$ باشد ، سرعت و شتاب مختلف العلامه بوده و حرکت کند شونده است . $(av<0)$

قبل از تغییر جهت حرکت کند شونده و بعد از تغییر جهت حرکت تند شونده است .

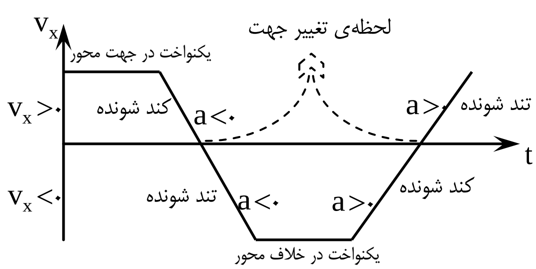
نتیجه : اگر ضریب t^2 و t هم علامت باشند، حرکت همواره تند شونده است.

اگر ضریب t^2 و t مختلف العلامه باشند، حرکت ابتدا کند شونده ، سپس تند شونده است.

در حرکت با شتاب متغیر ، ابتدا علامت سرعت و شتاب را تعیین نموده ، سپس با رسم جدول تعیین علامت ، نوع حرکت شتابدار را مشخص می‌کنیم .

تعیین نوع حرکت از روی نمودار سرعت زمان :

از روی محور قائم علامت سرعت مشخص شده و از روی شیب نمودار، علامت شتاب مشخص می‌گردد .

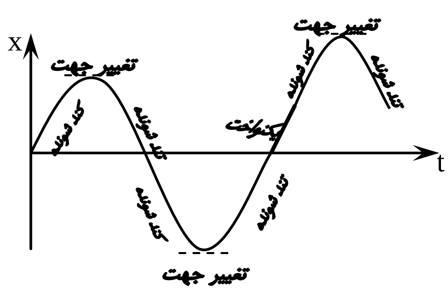


$\tan\theta_{v-t}>0 \Rightarrow a>0$

$\tan\theta_{v-t}<0 \Rightarrow a<0$

قبل از تغییر جهت حرکت کند شونده و بعد از تغییر جهت حرکت تند شونده است .

تعیین نوع حرکت از روی نمودار مکان ـ زمان : **شیب نمودار مکان- زمان علامت سرعت را مشخص کرده و تغییر شیب این نمودار علامت تغییر سرعت یا شتاب را مشخص می‌کند .**



شیب نمودار مثبت $(v_x>0)$ و رو به افزایش $(\Delta v_x>0 \Rightarrow a_x>0)$ باشد حرکت تند شونده ،

شیب مثبت بوده $(v_x>0)$ و رو به کاهش $(\Delta v_x<0 \Rightarrow a_x<0)$ باشد حرکت کند شونده ،

شیب منفی بوده $(v_x<0)$ و رو به افزایش $(\Delta v_x>0 \Rightarrow a_x>0)$ باشد حرکت کند شونده ،

شیب منفی بوده $(v_x<0)$ و رو به کاهش $(\Delta v_x<0 \Rightarrow a_x<0)$ باشد حرکت تند شونده است .

ماکزیمم یا می‌نیمم تابع ، لحظه‌ی تغییر جهت است .

قبل از تغییر جهت حرکت کند شونده و بعد از تغییر جهت حرکت تند شونده است .

تعیین نوع حرکت از روی نمودار شتاب ـ زمان : **از روی نمودار شتاب- زمان علامت شتاب را تعیین نموده ، سپس با محاسبه‌ی سطح زیر این نمودار تغییرات سرعت و علامت سرعت را مشخص می‌کنیم .**

دو متحرک از دو نقطهٔ متفاوت هم زمان شروع به حرکت می‌کنند . برای محاسبهٔ زمانی که طول می‌کشد تا دو متحرک به یک‌دیگر برسند ، ابتدا معادلهٔ حرکت دو متحرک را با رعایت علامت a , v , x نسبت به مبداء دلخواه نوشته و دو معادله را مساوی هم قرار می‌دهیم $(x_1=x_2)$. در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند نمودار مکان- زمان آن‌ها یک‌دیگر را قطع نموده یا بر هم مماس می‌شوند .

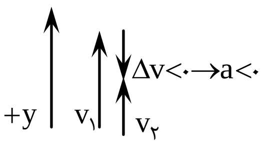
اگر سرعت دو متحرک پس از t ثانیه برابر شود ، پس از $2t$ ثانیه دو متحرک بهم می‌رسند .

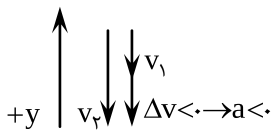
حرکت پرتابی در راستای قائم

گلوله‌ای را در راستای قائم در شرایط خلاء پرتاب می‌کنیم ، چون سرعت گلوله در طول مسیر حرکت تغییر می‌کند ، پس این حرکت جزو حرکت‌های شتابدار می‌باشد . نیرویی که در شرایط خلاء بر گلوله وارد می‌شود ، تنها نیروی ثابت وزن در راستای قائم می‌باشد، پس شتاب در حرکت پرتابی در راستای قائم ثابت می‌باشد .

$$F=ma=-mg \Rightarrow a=-g$$

۱- در حرکت پرتابی در راستای قائم بطرف بالا یا پائین ، شتاب همواره $-g$ است .





Δv ***همواره در خلاف جهت محور است.***

۲- تمام معادلات حرکت شتابدار با شتاب ثابت در اینجا نیز صادق است .

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_{0y}t+y_0 \qquad \bar{v}_y=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{v_{1y}+v_{2y}}{2}=-\frac{1}{2}gt+v_{0y}$$

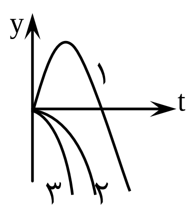
$$v_y=-gt+v_{0y} \qquad y-y_0=\frac{v_y+v_{0y}}{2}t$$

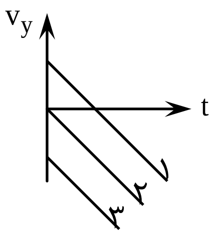
$$v_y^2-v_{0y}^2=-2g(y-y_0)$$

۳- جهت حرکت به طرف بالا مثبت در نظر گرفته می‌شود ، پس علامت سرعت وقتی جسم بالا می‌رود مثبت ($v_y>0$) و وقتی پائین می‌آید منفی است . ($v_y<0$)

٤- محل پرتاب مبداء در نظر گرفته می‌شود ، اگر جسم بالای مبداء باشد $y>0$ و اگر زیر مبداء باشد $y<0$ است .

٥- نمودار مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان در حرکت پرتابی در راستای قائم به صورت زیر رسم می‌شوند :





۱- حرکت پرتابی در راستای قائم بطرف بالا
۲- حرکت سقوط آزاد
۳- حرکت سقوطی (پرتابی در راستای قائم بطرف پائین)

تذکر : شیب نمودار سرعت – زمان هر سه حرکت یکسان است ، زیرا شتاب حرکت در راستای قائم در شرایط خلاء ثابت است .

٦- *سقوط آزاد:* به حرکت سقوطی که بدون سرعت اولیه و تنها تحت اثر نیروی وزن انجام می‌گیرد ، سقوط آزاد گویند .

۷- *نقطه‌ی اوج :* وقتی گلوله‌ای را در راستای قائم بطرف بالا پرتاب می‌کنیم ، چون بردارهای شتاب و سرعت در خلاف جهت یک‌دیگرند، پس سرعت کاهش یافته و در نقطه‌ای به نام نقطهٔ اوج به صفر می‌رسد . در این نقطه جهت حرکت گلوله تغییر می‌کند . فاصلهٔ نقطهٔ اوج از محل پرتاب را ارتفاع اوج و زمان رسیده به نقطهٔ اوج را زمان اوج گویند .

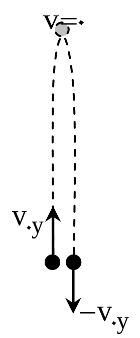
$$v_y^2-v_{0y}^2=-2gy \xrightarrow{v_y=0} \overset{\text{ارتفاع اوج}}{H}=\frac{v_{0y}^2}{2g}$$

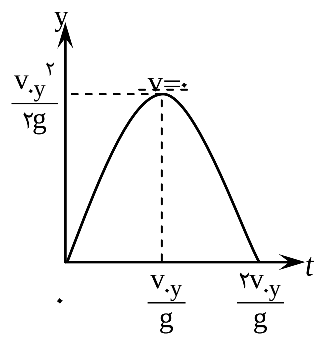
$$v_y=-gt+v_{0y} \xrightarrow{v_y=0} \overset{\text{زمان اوج}}{t}=\frac{v_{0y}}{g}$$

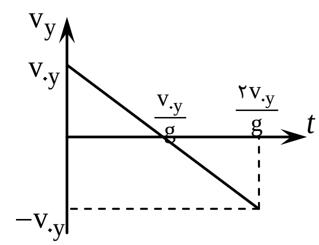
۸- مدت زمانی که گلوله از محل پرتاب به نقطه‌ی اوج می‌رود با زمانی که گلوله از نقطه‌ی اوج به محل پرتاب برمی‌گردد ، برابر است .

۹- اگر گلوله‌ای را از نقطه‌ای با سرعت v_y بطرف بالا پرتاب کنیم ، وقتی گلوله به محل پرتاب می‌رسد دارای سرعت $-v_y$ است .

۱۰- نمودارهای حرکت پرتابی در راستای قائم در شرایط خلاء به سمت بالا تا رسیدن به محل پرتاب به صورت زیر رسم می‌شود .



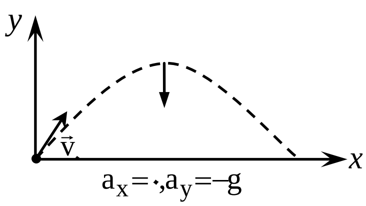




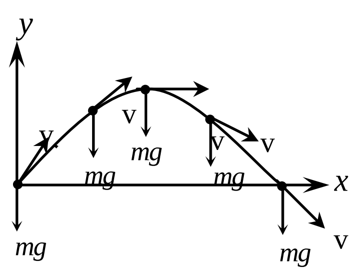
اگر سرعت اولیه‌ی n برابر شود، ارتفاع اوج n^2 برابر و زمان اوج n برابر می‌گردد.

$t\uparrow^{n} \propto v_0\uparrow^{n}$ $\qquad$ $H\uparrow^{n^2} \propto \uparrow^{n} v_0^2$

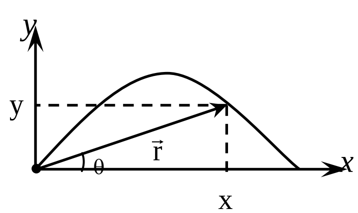
حرکت پرتابی در صفحه: گلوله‌ای که با سرعت اولیهٔ v_0 تحت زاویهٔ α نسبت به افق در صفحه xoy پرتاب شود را پرتابه و این حرکت را پرتابی در صفحه گویند . در حرکت پرتابی در صفحه تنها نیرویی که در طول مسیر بر گلوله وارد می‌شود نیروی وزن بوده که در راستای قائم است ($F_y=ma_y=-mg$) . پس در حرکت پرتابی در صفحه تنها در راستای قائم شتاب وجود داشته ($a_y=-g$) و شتاب حرکت در راستای افق صفر است (($a_x=0$) حرکت یکنواخت) . در شکل زیر مسیر حرکت پرتابی در صفحه نشان داده شده است . نکاتی که در حرکت پرتابی در راستای قائم رعایت گردید ، در اینجا نیز صدق می‌کند.



در شکل روبه‌رو ردّ پرتابه در فضا (مسیر حرکت پرتابی) در صفحهٔ xoy نشان داده شده است . این مسیر یک سهمی است . می‌دانیم که بردار سرعت بر مسیر حرکت مماس است ، پس از لحظهٔ شروع حرکت پرتابی تا انتهای مسیر همواره زاویهٔ بین بردار سرعت و نیرو (شتاب) حرکت رو به کاهش است.

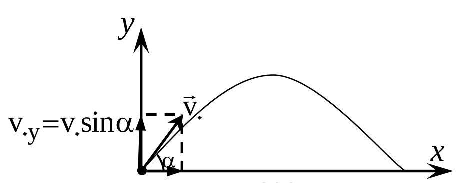


در حرکت پرتابی در صفحه به جای بررسی بردارهای مکان و سرعت به بررسی مولفه‌های افقی و قائم آن‌ها می‌پردازیم .



$\vec r = x\vec i + y\vec j \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$



$v_{0x}=v_0\cos\alpha$

$\vec v_0 = v_{0x}\vec i + v_{0y}\vec j \Rightarrow v_0=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2}$

$\tan\alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$

$\vec a = \cancel{a_x\vec i} + a_y\vec j = -g\vec j$

$a=-g$

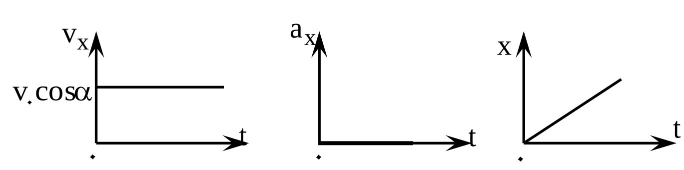
معادلات حرکت پرتابی در صفحه :

تصویر حرکت پرتابی در صفحه در راستای افقی ، یکنواخت (سرعت ثابت) است .

$\mathbf{v_x = \text{ثابت} \Rightarrow a_x = 0}$

$\mathbf{x = v_{0x}t + x_0 \xrightarrow{v_{0x}=v_0\cos\alpha} x = v_0 t\cos\alpha}$

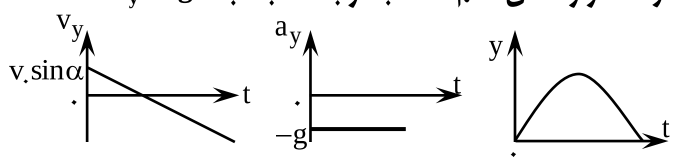
$\mathbf{v_x=\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha}$



تصویر حرکت در راستای قائم ، شتاب‌دار با شتاب ثابت $a_y=-g$ است .

$$y=\frac{1}{2}a_y t^2+v_{0y}t+y_0 \xrightarrow{y_0=0\ ,\ v_{0y}=v_0\sin\alpha} y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t\sin\alpha$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=-gt+v_0\sin\alpha$$



بردارهای مکان و سرعت در حرکت پرتابی در صفحه در شرایط خلاء برابر است با :

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j} \Rightarrow r=(v_0 t\cos\alpha)\vec{i}+(-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t\sin\alpha)\vec{j} \quad , \quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=(v_0\cos\alpha)\vec{i}+(-gt+v_0\sin\alpha)\vec{j} \quad , \quad \tan\theta=\frac{v_y}{v_x}$$

معادله‌ی مسیر حرکت پرتابی در صفحه: با حذف زمان بین معادلات حرکت در راستای افق و قائم ، معادلهٔ مسیر حرکت بدست می‌آید .

$$\left.\begin{array}{l} x=v_0 t\cos\alpha \\ y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t\sin\alpha \end{array}\right\} \xrightarrow{t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}} y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2+v_0\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)\sin\alpha \Rightarrow y=-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}+x\tan\alpha$$

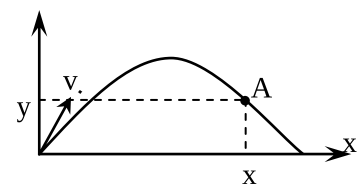
در این معادله $y\propto(-x^2)$ است ، معادلهٔ مسیر یک سهمی بوده که دارای ماکزیمم می‌باشد . $(y=-Ax^2+Bx)$

محاسبه‌ی سرعت پرتابه در هر نقطه از مسیر حرکت : می‌دانیم که بردار سرعت بر مسیر حرکت مماس است . این بردار دارای دو مولفهٔ افقی و قائم است .

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j} \rightarrow v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2+(-gt+v_0\sin\alpha)^2}$$

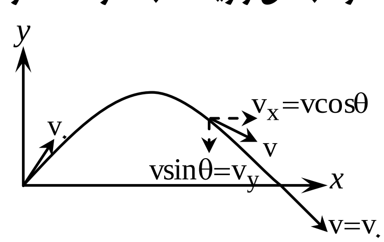
$$v=\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha+v_0^2\sin^2\alpha+g^2t^2-2gtv_0\sin\alpha}=\sqrt{v_0^2-2g(-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t\sin\alpha)}=\sqrt{v_0^2-2gy} \Rightarrow v^2-v_0^2=-2gy$$

وقتی گفته می‌شود که پرتابه‌ای از یک نقطه به مختصات (x,y) می‌گذرد ، مختصات آن نقطه در معادلات حرکت صدق می‌کند .



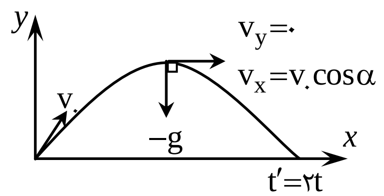
$$A\left|\begin{array}{l} x=v_0 t\cos\alpha \\ y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t\sin\alpha \end{array}\right. \Rightarrow y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

گلوله‌ای را از سطح زمین تحت زاویهٔ α به سمت بالا پرتاب می‌کنیم ، وقتی گلوله به افق اولیهٔ پرتاب یعنی زمین می‌رسد ، سرعتش با سرعت اولیه‌ی پرتاب برابر بوده و بردار سرعت همان زاویهٔ α را با افق می‌سازد . در لحظه‌ای که بردار سرعت گلوله با افق زاویهٔ θ بسازد ، اندازهٔ سرعت به صورت زیر محاسبه می‌شود :



$$\left.\begin{array}{l} v_x=v\cos\theta=v_0\cos\alpha \\ v_y=v\sin\theta=-gt+v_0\sin\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{-gt+v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha} \\ v=\sqrt{v_x^2+v_y^2} \end{array}\right.$$

نقطهٔ اوج: در این نقطه بردار سرعت افقی بوده $(v_x=v_{0x}=v_0\cos\alpha)$ و مولفهٔ قائم سرعت صفر $(v_y=0)$ است ، در این نقطه سرعت به کم-ترین مقدار خود در طول مسیر می‌رسد . در نقطهٔ اوج بردار سرعت و شتاب بر هم عمود می‌باشند . فاصلهٔ قائم نقطهٔ اوج تا افق پرتاب را ارتفاع اوج و زمانی که طول می‌کشد تا پرتابه به نقطهٔ اوج برسد را زمان اوج گویند .



$$v_y=-gt+v_{0y} \xrightarrow{v_y=0} t_{\text{اوج}}=\frac{v_{0y}}{g}=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

$$v_y^2-v_{0y}^2=-2gy \xrightarrow{v_y=0} H_{\text{اوج}}=\frac{v_{0y}^2}{2g}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$

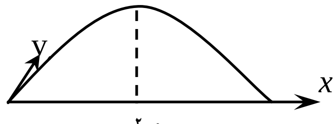
$$x=v_{0x}t=v_0 t\cos\alpha \xrightarrow{t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}} x_{\text{اوج}}=\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{2g}$$

مدت زمانی که طول می‌کشد تا گلوله‌ای که از سطح زمین پرتاب شده دوباره به سطح زمین برگردد، ۲ برابر زمان رسیده گلوله به نقطه‌ی اوج است.

نسبت انرژی جنبشی در نقطهٔ اوج به انرژی جنبشی در لحظهٔ پرتاب برابر است با :

$$k=\frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow[v'=v_0]{v=v_0\cos\alpha} \left.\begin{array}{l} k'=\frac{1}{2}mv_0^2\cos^2\alpha \\ k=\frac{1}{2}mv_0^2 \end{array}\right\} \frac{k'}{k}=\cos^2\alpha$$

برد یا تیررس: **بیش‌ترین فاصلهٔ افقی پرتابه از نقطهٔ پرتاب را بُرد گویند . بُرد پرتابه دو برابر x اوج است . زمان بُرد دو برابر زمان اوج است .**



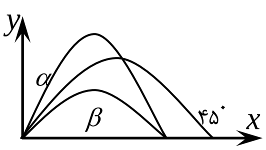
$$x=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{2g}$$

$$x=v_0t\cos\alpha \xrightarrow{t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}\Rightarrow x=R} R=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} \begin{cases} R=\frac{2(v_0\cos\alpha)(v_0\sin\alpha)}{g}\Rightarrow R=\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} \\ 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha\Rightarrow R=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g} \end{cases}$$

برد پرتابه وقتی ماکزیمم است که $\alpha=45^\circ$ باشد.

$$R=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g} \xrightarrow{\alpha=45^\circ \ \to\ 2\alpha=90^\circ \ \to\ \sin2\alpha=1} R_{max}=\frac{v_0^2}{g}$$

دو گلوله را با سرعت اولیه‌ی یکسان یکی را تحت زاویه‌ی α و دیگری تحت زاویه‌ی β نسبت به افق پرتاب می‌کنیم، اگر $\alpha+\beta=90$ باشد، برد دو پرتابه یکسان است. $R_\alpha=R_\beta$



با افزایش زاویهٔ پرتاب بُرد پرتابه ممکن است افزایش یا کاهش یافته یا حتی ابتدا افزایش ، سپس کاهش یابد . با افزایش زاویهٔ پرتاب تا °۴۵ بُرد افزایش یافته و تا افزایش زاویهٔ پرتاب تا °۹۰ ارتفاع اوج افزایش می‌یابد .

رابطهٔ بین بُرد و ارتفاع اوج به صورت زیر محاسبه می‌شود :

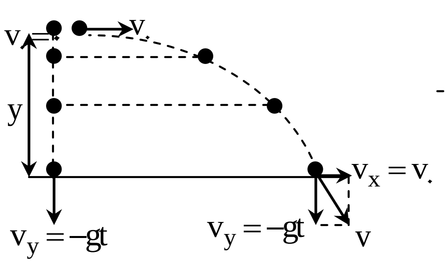
$$\left.\begin{array}{l} R=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}=\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} \\ H_{\text{اوج}}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=\frac{v_{0y}^2}{2g} \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases} \frac{R}{H}=\frac{2\sin2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{4\cos\alpha}{\sin\alpha}=4\cot\alpha \\ \frac{R}{H}=\frac{4v_{0x}}{v_{0y}}=\frac{4v_0\cos\alpha}{v_0\sin\alpha}=4\cot\alpha \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\alpha=45^\circ} R=4H$$

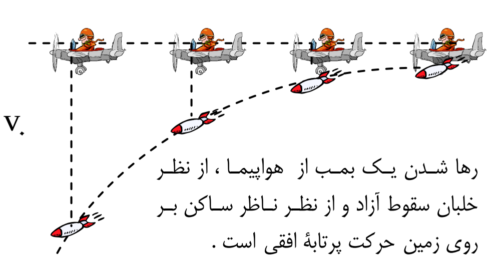
وقتی گلوله‌ای را به سمت بالا پرتاب می‌کنیم، هرچه به نقطه‌ی اوج نزدیک می‌شود سرعتش کاهش یافته و در نقطه‌ی اوج دارای کم‌ترین سرعت در طول مسیر می‌باشد. بیش‌ترین سرعت مربوط به پایین‌ترین نقطه در طول مسیر حرکت است.

پرتابه‌ی افقی: **در این حرکت گلوله با سرعت اولیهٔ v_0 از ارتفاع y به طور افقی $(\alpha=0)$ پرتاب می‌گردد .اگر در تمام معادلات حرکت پرتابی $\alpha=0$ را قرار دهیم ، معادلات حرکت پرتابه افقی بدست می‌آید .** $v_y=-gt$, $v_x=v_0$, $x=v_0t$, $v^2-v_0^2=-2gy$, $y=-\frac{gx^2}{2v_0^2}$, $y=-\frac{1}{2}gt^2$

تصویر حرکت پرتابهٔ افقی در راستای قائم همان حرکت سقوط آزاد است . زمان حرکت سقوط آزاد با زمان حرکت پرتابهٔ افقی از همان ارتفـاع برابر است .



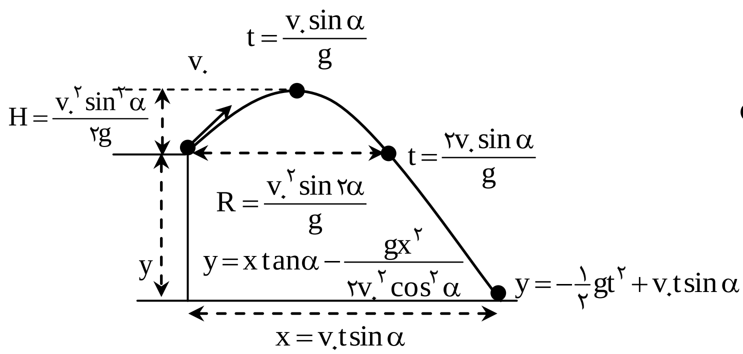
محل پرتاب مبداء در نظر گرفته می‌شود ، پس جسم همواره زیر مبداء پرتاب بوده و $y<0$ است .



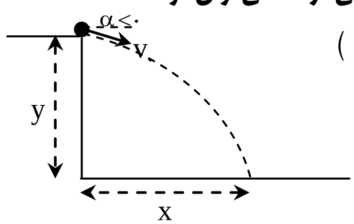
رها شدن یک بمب از هواپیما ، از نظر خلبان سقوط آزاد و از نظر ناظر ساکن بر روی زمین حرکت پرتابهٔ افقی است .

$$y=-\frac{1}{2}gt_1^2+v_0t_1 \xrightarrow{v_0=0} y=-\frac{1}{2}gt_1^2$$
$$y=-\frac{1}{2}gt_2^2+v_0t_2\sin\alpha \xrightarrow{\alpha=0} y=-\frac{1}{2}gt_2^2$$
$$\Rightarrow t_1=t_2$$

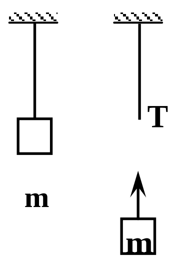
برای پرتابه‌ای از نقطه‌ای به ارتفاع y با سرعت اولیه‌ی v_0 تحت زاویه‌ی α نسبت به افق بطرف بالا پرتاب می‌گردد، می‌توان نوشت:



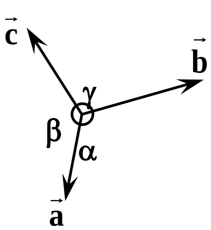
برای پرتابه‌ای از نقطه‌ای به ارتفاع y با سرعت اولیهٔ v_0 تحت زاویهٔ α نسبت به افق به طرف پائین پرتاب می‌گردد، می‌توان نوشت :



در تمام روابط باید $\alpha<0$ باشد . $(\cos(-\alpha)=\cos\alpha \;,\; \sin(-\alpha)=-\sin\alpha)$



نیروی کشش نخ: **نیرویی که از طرف نخ بر اجسام وارد می‌شود را نیروی کشش نخ (T) گویند . در شکل روبه‌رو وزنه‌ای به جرم m توسط نخ سبکی از یک نقطه آویزان می‌باشد . اگر نخ پاره شود وزنه سقوط می‌کند، نیرویی که باید به نخ پاره شده وارد نمود تا جسم را با سرعت ثابت حرکت داده و به محل اولیهٔ برگرداند ، نیروی کشش نخ نامیده می‌شود . این نیرو در امتداد نخ و به سمت وسط نخ ، بر جسم اثر می‌کند .** ***با صرف نظر از جرم نخ، نیروی کشش در تمام نقاط نخ یکسان است.***



تعادل اجسام **: جسمی در حال تعادل است که برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد . برآیند نیروهای وارد برجسم در دو راستای افق و قائم صفر باشد .** $\sum F_x=0 \;,\; \sum F_y=0$

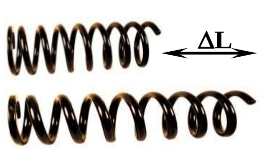
در تعادل سه نیرو می‌توان از رابطه‌ی سینوس‌ها در حل مثلث استفاده نمود .

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

نیروی کشسانی فنر: **اگر در فنری تغییر طول بوجود آید ، از طرف فنر نیروی برگرداننده‌ای ایجاد شده تا فنر را به حالت اولیهٔ خود (وضع تعادل) برساند . این نیروی برگرداننده را نیروی کشسانی فنر گویند . اندازه‌گیری دقیق نشان می‌دهد که نیروی کشسانی فنر متناسب با تغییر طول فنر است . به ضریب ثابت این تناسب ، ثابت فنر یا ضریب سختی فنر گویند . (هر چه قدر تغییر طول فنر بیش‌تر باشد نیروی کشسانی فنر بزرگ‌تر است .)**

$F\propto\Delta L \Rightarrow F_{(N)}=k\Delta L_{(m)}$ **(رابطه‌ی هوک)**

واحد ضریب سختی فنر نیوتن بر متر (N/m) است .

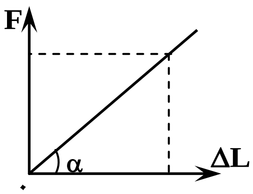


ضریب سختی فنر (k) به عوامل زیر بستگی دارد :

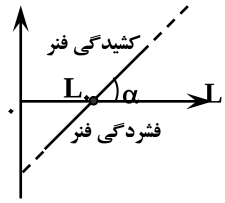
۱- جنس سیم فنر ۲- طول فنر ۳- ضخامت سیم فنر ٤- سطح حلقه‌های فنر ٥- تعداد حلقه‌های فنر

تغییر دما باعث تغییر در ساختمان فنر شده و ثابت آن نیز تغییر می‌کند .

نمودارهای نیروی کشسانی فنر بر حسب طول و تغییر طول فنر به صورت زیر رسم می‌شوند . شیب این نمودارها برابر ثابت فنر است .



$$\tan\alpha=\frac{F}{\Delta L}=k$$



هنگامی که به یک فنری به ثابت k وزنه‌ای به جرم m را می‌آویزیم ، نیروی وزن وزنه باعث تغییر طول فنر می‌شود . وقتی فنر به تعادل می‌رسد ، نیرویی برگرداننده‌ٔ فنر برابر وزن وزنهٔ آویخته به آن است .

$$F=k\Delta L \Rightarrow mg=k(L-L_0)$$

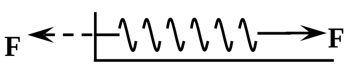
طول فنری وقتی دو وزنهٔ m_1 و m_2 را به فنری متصل کنیم ، به ترتیب L_1 و L_2 می‌شود . در این حالت ثابت فنر برابر است با:

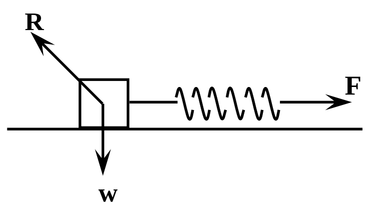
$$\left.\begin{array}{l}F_1=k(L_1-L_0)=m_1g\\F_2=k(L_2-L_0)=m_2g\end{array}\right\}\Rightarrow k(L_2-L_1)=(m_2-m_1)g \Rightarrow k\Delta L=\Delta mg \;,\; \frac{m_2}{m_1}=\frac{L_2-L_0}{L_1-L_0}$$

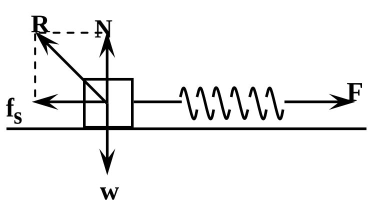
اگر یک دستگاه وزنه فنر را به نقطهٔ دیگری ببریم :

$$\frac{g_2}{g_1}=\frac{L_2-L_0}{L_1-L_0}$$

فنری را به دیواری بسته یا از دو طرف آن را با نیروی F بکشیم ، وقتی فنر ساکن است نیروی کشسانی فنر برابر F می‌باشد .







نیروی اصطکاک ایستایی: مطابق شکل روبه‌رو توسط یک فنر افقی و سبک نیروی افقی F به وزنه‌ای به جرم m که بر روی سطح افقی قرار دارد ، وارد شده و جسم در اثر این نیرو ساکن می‌باشد . سایر نیروهای وارد بر جسم ، نیروی وزن (w) که از طرف زمین بر جسم وارد می‌شود و نیروی عکس العمل سطح یا نیروی تماسی (R) که از طرف سطح بر جسم وارد می‌گردد . نیروی عکس العمل سطح (R) دارای دو مولفهٔ افقی (مماسی) و عمودی است . اگر در اثر اعمال نیروی F جسم ساکن بماند ، باید برآیند نیروهای وارد بر جسم در دو راستای افقی و قائم صفر باشد ، پس نیرو وزن با مولفهٔ قائم R(نیروی عمودی سطح N) و نیروی خارجی F با مولفهٔ مماسی R (نیروی اصطکاک ایستایی f_s) خنثی می‌شود .

$$\sum F_x=0 \Rightarrow F-f_s=0 \Rightarrow F=f_s$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow N-w=0 \Rightarrow N=w=mg$$

نیروی R به این دلیل مایل رسم شده که چون جسم ساکن است ، باید برآیند ۳ نیروی F و R و W صفر شود . پس اگر نیرو R را قائم رسم کنیم برآیند ۳ نیرو صفر نشده و جسم شروع به حرکت می‌کند .

اگر با افزایش F جسم ساکن بماند، نیروی اصطکاک ایستایی نیز به همان اندازه افزایش یافته است. یعنی نیروی اصطکاک ایستایی ثابت نبوده و تا ماکزیمم مقدار خود در آستانهٔ حرکت افزایش می‌یابد . اندازه گیری دقیق نشان می‌دهد که ماکزیمم نیروی اصطکاک ایستایی در آستانهٔ حرکت (f_{smax}) ، متناسب با نیروی عمودی سطح (N) است .ضریب ثابت این تناسب را ضریب اصطکاک ایستایی (μ_s) گویند .

$$\underset{\text{آستانه‌ی حرکت}}{f_{smax}=\mu_s N}$$

μ_s فاقد یکا بوده و به جنس و سطح تماس دو جسم و چگونگی سطح تماس (میزان صافی و زبری) بستگی دارد .

نتیجه: نیروی اصطکاک ایستایی از صفر تا ماکزیمم مقدار خود در آستانه‌ی حرکت متغیر است. $0 \le f_s \le \mu_s N$

اگر در غیاب نیروی خارجی F جسم ساکن است، یعنی: $f_s = 0$

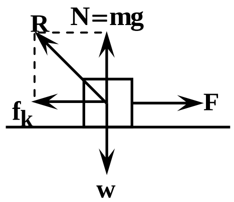
اگر در حضور نیروی خارجی F باز هم جسم ساکن بماند، یعنی: $f_s = F$

یادمان باشد، هرگز نیروی اصطکاک ایستایی از نیروی خارجی بزرگ‌تر نمی‌باشد.

نیرویی که از طرف سطح افقی بر جسم وارد می‌شود برابر است با: $R=\sqrt{N^2+f_s^2} \xrightarrow[f_s=\mu_s N=\mu_s mg]{\text{آستانه‌ی حرکت}} R=N\sqrt{1+\mu_s^2}$

ضریب ثابت تناسب ضریب اصطکاک لغزشی (μ_k) نامیده شده که به جنس و کیفیت سطوح تماس بستگی داشته و ربطی به N و f_k ندارد.

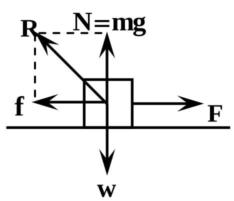
$f_k \propto N \Rightarrow f_k = \mu_k N$



رابطه‌ی $f_k = \mu_k N$ مانند $f_{smax} = \mu_s N$ یک رابطه‌ی جبری است. یعنی بردار نیروی اصطکاک در جهت نیروی عمودی سطح نمی‌باشد.

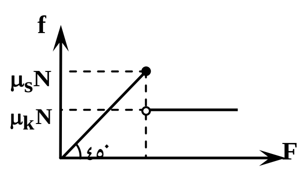
$$R=\sqrt{N^2+f_k^2} \xrightarrow{f_k=\mu_k N} R=N\sqrt{1+\mu_k^2}$$

اگر سطح تماس دو جسم خیلی صیقلی باشد، نیروی اصطکاک ایستایی بزرگ‌تر می‌شود. زیرا برای جسم ساکن، وجود جوش خوردگی موقتی (جوش سرد) میان مولکول‌های جسم و سطح تماس، نوعی نیروی چسبندگی سطحی بین دو جسم پدید آورده که باعث افزایش نیروی اصطکاک ایستایی می‌شود. پس ضریب اصطکاک ایستایی از ضریب اصطکاک لغزشی بزرگ‌تر است. $\mu_s > \mu_k$

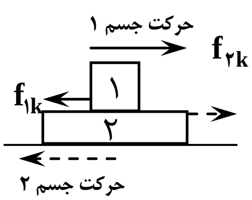


تا زمانی که با افزایش نیروی خارجی F جسم ساکن است، نیروی اصطکاک f_s نیز به همان اندازه افزایش می‌یابد. وقتی نیروی خارجی F از نیروی f_{smax} بزرگ‌تر شود، جسم شروع به حرکت نموده و نیروی اصطکاک در طول حرکت تقریباً ثابت می‌ماند.

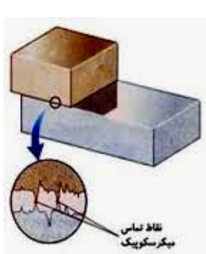
نمودار نیروی اصطکاک بر حسب نیروی خارجی F به صورت روبه‌رو رسم می‌شود:



جهت نیروی اصطکاک: وقتی دو جسم روی یک‌دیگر قرار گرفته و نسبت به هم حرکت می‌کنند، نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت نسبی دو جسم است. در شکل زیر برای جسم ۱ که به سمت راست حرکت می‌کند، نیروی اصطکاک به طرف چپ است. برای جسم ۲ که به سمت چپ حرکت می‌کند نیروی اصطکاک به طرف راست است. نیروی اصطکاک نوعی نیروی مماسی است که با حرکت نسبی دو جسمی که با هم در تماسند، مخالفت می‌کند.

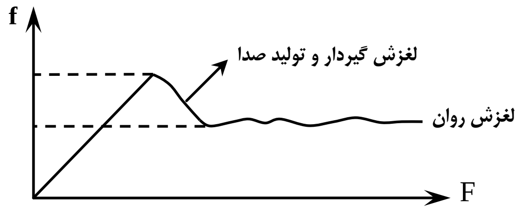


نیروی اصطکاک متناسب با نیرویی است که دو جسم را می‌فشارد. نیروی اصطکاک جنبشی (لغزشی) به مساحت سطح تماس دو جسم بستگی ندارد. نیروی اصطکاک در سرعت‌های کم به سرعت بستگی ندارد.



در مقیاس میکروسکوپی هر چه سطوح زبرتر و خشن‌تر باشند، اصطکاک بیش‌تر است. اگر سطوح را بیش از حد معینی صیقل دهیم، اصطکاک دو باره افزایش می‌یابد. نمودار واقعی نیروی اصطکاک بر حسب نیروی خارجی وارد بر جسم به‌صورت زیر می‌باشد. همان گونه که در نمودار دیده می‌شود، نیروی اصطکاک جنبشی به طور کامل ثابت

نیست . همراه با لغزیدن سطح جسمی روی سطح دیگر ، پیوندهایی بین مولکول‌های سطوح ، بسته و سپس شکسته می‌شوند . تعداد کل این پیوندها در تغییر است .



قوانین نیوتن درباره‌ی حرکت

قانون اوّل نیوتن: هر جسم حالت سکون و یا حرکت یکنواخت خود را در مسیر مستقیم حفظ می‌کند ، مگر آن که تحت تأثیر نیرو یا نیروهایی مجبور به تغییر حالت (تغییر در وضعیت سکون یا حرکت و یا تغییر شکل) شود . $\sum F=0$

اجسام تمایل به حفظ حالت قبلی خود را دارند و در برابر تغییر حالت از خود مقاومت نشان می‌دهند ، این مقاومت در برابر تغییر حالت اینرسی یا لَختی نام دارد . اینرسی یا لختی معادل قانون اوّل نیوتن است .

در شروع حرکت اتومبیل به نظر می‌رسد که به سمت عقب پرتاب می‌شویم ، در صورتی که ما تمایل به حفظ حالت سکون خود را داشته است ، اتومبیل است که به سمت جلو حرکت می‌کند. در هنگام ترمز به نظر می‌رسد که به سمت جلو پرتاب می‌شویم ، در صورتی که ما تمایل به حفظ حرکت خود را داشته این اتومبیل است که می‌ایستد. در پیچ جاده به نظر می‌رسد که به سمت خارج پیچ پرتاب می‌شویم ، در صورتی که ما تمایل به حرکت بر روی خط راست را داشته این اتومبیل است که منحرف می‌گردد.

قانون دوّم نیوتن: نیروی برآیند وارد بر جسم برابر است با حاصل ضرب جرم جسم در شتاب آن . $\vec{F}=m\vec{a}$

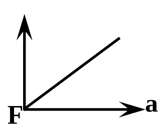
در این رابطه $\vec{F}$ برآیند نیروهای وارد بر جسم بوده که به صورت $\sum F$ نیز نمایش داد می‌شود .

واحد نیرو kgm/s^2 یا N است . یک نیوتن نیرویی است که به جرم $1kg$ شتاب $1m/s^2$ بدهد . چون جرم یک کمیت نرده‌ای و مثبت است ، پس نیرو و شتاب در یک جهت می‌باشند . $1N=1kg\times 1m/s^2$

برآیند نیروهای وارد بر یک جسم با توجه به زاویهٔ بین نیروها محاسبه می‌شود .

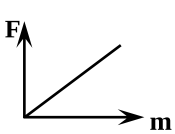
$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2 \xrightarrow{F^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha} \begin{cases} \alpha=0 \Rightarrow F=F_1+F_2 \\ \alpha=90^\circ \Rightarrow F=\sqrt{F_1^2+F_2^2} \\ \alpha=180^\circ \Rightarrow F=\left|F_1-F_2\right| \\ F_1=F_2 \Rightarrow F=2F_1\cos\frac{\alpha}{2} \xrightarrow{\alpha=120^\circ} F=F_1=F_2 \end{cases}$$

اگر جرم ثابت باشد ، نیرو و شتاب متناسب با یکدیگرند .



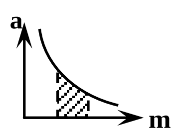
$F\propto a \Rightarrow \frac{F}{a}=$ مقدار ثابت $\qquad \overset{\text{شیب نمودار}}{\tan\theta}=\frac{F}{a}=m$ شیب نمودار نیرو بر حسب شتاب برابر جرم است .

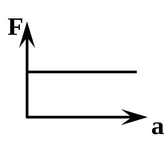
اگر شتاب ثابت باشد ، نیرو و جرم نسبت مستقیم دارند .



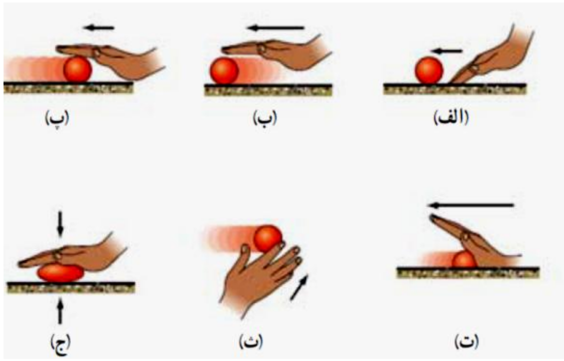
$F\propto m \Rightarrow \frac{F}{m}=$ مقدار ثابت $\qquad \overset{\text{شیب نمودار}}{\tan\theta}=\frac{F}{m}=a$ شیب نمودار نیرو بر حسب جرم برابر شتاب است .

اگر نیروی وارد بر جسم ثابت باشد ، جرم و شتاب نسبت عکس با یکدیگر دارند .





$a\propto\frac{1}{m} \Rightarrow ma=$ مقدار ثابت $\qquad \overset{\text{سطح زیر نمودار}}{S_{a-m}}=ma=F$ سطح زیر نمودار شتاب بر حسب جرم برابر نیرو است .



نیروی وارد بر یک جسم ممکن است سبب :

الف : شروع حرکت آن شود .

ب : افزایش سرعت آن شود .

پ : کاهش سرعت آن شود .

ت : توقف آن شود .

ث : تغییر جهت حرکت آن شود .

ج : تغییر شکل آن شود .

در نوشتن قانون دوّم نیوتن نکات زیر رعایت شود :

۱- جسمی که قرار است حرکت آن بررسی شود ، مشخص گردد .

۲- تمام نیروهای وارد بر جسم را با توجه به جهت‌شان رسم شوند .

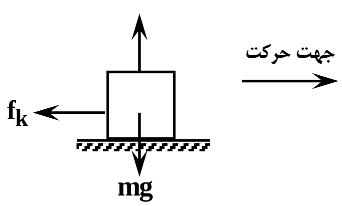
۳- محورهای عمود بر همی انتخاب شود ، که بهتر است یکی از محورها در راستای حرکت باشد .

٤ - اگر نیرویی در راستای دو محور نبود ، در راستای محورها تجزیه شود .

۵- علامت نیرویی که موافق حرکت است مثبت و علامت نیرویی که مخالف حرکت است ، منفی می‌باشد .

٦- قانون دوّم نیوتن در دو راستا ، جداگانه نوشته شود . $\sum F_x = ma_x \ , \ \sum F_y = ma_y$

جسمی به جرم m را با سرعت اولیه‌ی v_0 روی سطح افقی با ضریب اصطکاک μ_k پرتاب می‌کنیم . شتاب حرکت این جسم برابر است با:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow 0 - f_k = ma_x \xrightarrow{f_k=\mu_k N=\mu_k mg} -\mu_k mg = ma_x \Rightarrow a_x = -\mu_k g$$

چون شتاب در خلاف جهت حرکت است (شتاب منفی است) ، سرعت جسم کاهش یافته تا جسم بایستد . مسافت طی شده از لحظهٔ پرتاب تا ایست کامل برابر است با :

$$v_x^2 - \cancel{v_{0x}}^2 = 2a_x\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{-v_{0x}^2}{2a_x} \xrightarrow{a_x=-\mu_k g} \Delta x = \frac{v_{0x}^2}{2\mu_k g}$$

روابط بالا نشان می‌دهد که :

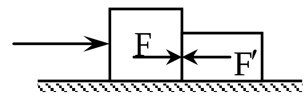
۱- شتاب حرکت جسمی که روی سطح افقی پرتاب شده است ، به جرم و سرعت اولیهٔ جسم بستگی ندارد .

۲- شتاب حرکت به ضریب اصطکاک و شتاب جاذبه بستگی دارد .

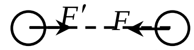
۳- مسافت طی شده تا ایست کامل به جرم جسم بستگی ندارد .

قانون سوّم نیوتن: هر عملی را عکس العملی است ، برابر و در خلاف جهت آن . قانون عمل و عکس العمل همواره بین دو جسم برقرار است . در اثر ضربهٔ پا به سنگ طبق قانون سوّم پا درد می‌گیرد . قایق‌ران با پارو زدن ، آب را به عقب رانده تا خودش به جلو حرکت نماید . وقتی راه می‌رویم زمین را به عقب هُل داده ، تا به جلو حرکت نمائیم . وقتی جسمی را از زمین بلند می‌کنیم ، دستمان به طرف پائین کشیده می‌شود . خروج آب از فواره‌ی گردان باعث چرخش فواره بدور محور خود می‌شود . قانون عمل و عکس العمل همواره بین دو جسم برقرار است . چون نیروی عمل و عکس العمل بر دو جسم اثر می‌کنند ، پس یک‌دیگر را خنثی نمی‌کنند . برای مشخص کردن نیروی عمل و عکس العمل ، باید مشخص نمود که این نیرو از طرف چه جسمی وارد می‌شود، عکس العمل آن بر همان جسم اثر می‌کند .

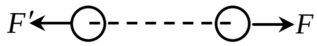
برای مثال : نیروی وزن از طرف زمین بر اجسام وارد می‌شود و عکس العمل این نیرو به زمین وارد می‌گردد . نیروی که از طرف جسم بر سطح زمین وارد می‌شود ، به صورت عکس العمل از سطح زمین بر جسم وارد می‌گردد . چون نیروی کشش کابل توسط موتور آن اعمال می‌شود ، پس عکس العمل آن بر موتور وارد می‌شود . نیروی عمل : خروج گاز از بدنهٔ موشک ، عکس العمل آن : نیروی وارد بر بدنهٔ موشک که باعث حرکت موشک به سمت بالا می‌شود .



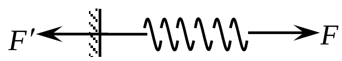
نیرویی که جسم اوّل به دوّم وارد می‌کند برابر نیرویی است که جسم دوّم به جسم اوّل وارد می کند .



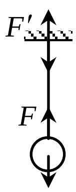
نیروی گرانشی که دو جسم بر هم وارد می‌کنند ، برابر و در خلاف جهت یکدیگرند .



نیروی دافعه و جاذبه‌ای که ذرّات باردار بر هم وارد می‌کنند ، برابر و در خلاف جهت یکدیگرند .



عکس العمل نیروی وارده بر فنر بر دیوار وارد می‌شود .
عکس العمل نیروی فنر بر عامل ایجاد F وارد می‌شود .

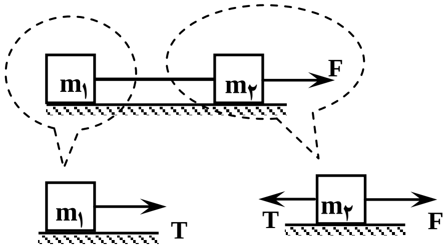


عکس العمل نیروی کشش نخ بر سقف وارد می‌شود .

در تمام شکل‌ها $\vec{F}=-\vec{F}'$ می‌باشد.

مطابق شکل زیر دو وزنه به جرم‌های m_1 و m_2 توسط نخی سبکی به یک‌دیگر متصل‌اند ، و توسط نیروی افقی F رو سطح افقی بدون اصطکاک کشیده می‌شوند . شتاب حرکت و نیروی کشش نخ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود :

ابتدا شتاب مجموعه را بدست می‌آوریم :



$$F=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\frac{F}{m_1+m_2}$$

اگر نیروی کشش نخ را T بنامیم ، می‌توان نوشت :

$$F-T=m_2a \Rightarrow a=\frac{F-T}{m_2}$$

$$T=m_1a \Rightarrow a=\frac{T}{m_1}$$

در زمان ثابت جابه‌جایی وزنه‌ها برابر و در یک جهت است ، پس شتاب حرکت دو وزنه مساوی می‌باشد . پس می‌توان نوشت :

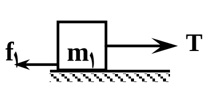
$$a=\frac{T}{m_1}\ ,\ a=\frac{F-T}{m_2}\ ,\ a=\frac{F}{m_1+m_2} \Rightarrow a=\frac{T}{m_1}=\frac{F-T}{m_2}=\frac{F}{m_1+m_2}$$

اگر سطح افقی دارای اصطکاک $(f_k=\mu_k N)$ باشد ، به صورت زیر عمل می‌کنیم :

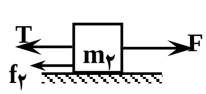
نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت به دو جسم وارد می‌شود .

$$F-f_1-f_2=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\frac{F-f_1-f_2}{m_1+m_2}$$

اگر نیروی کشش نخ را T بنامیم ، می‌توان نوشت :



$$T-f_1=m_1a \Rightarrow a=\frac{T-f_1}{m_1}$$

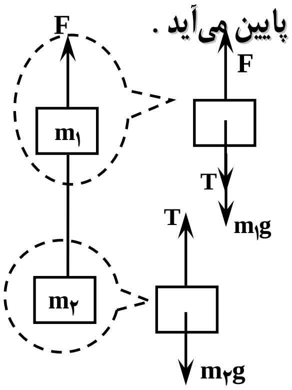


$$F-T-f_2=m_2a \Rightarrow a=\frac{F-T-f_2}{m_2}$$

$$a=\frac{F-f_1-f_2}{m_1+m_2}=\frac{T-f_1}{m_1}=\frac{F-T-f_2}{m_2}$$

وقتی قانون دوّم رابرای کل دستگاه می نویسیم کشش نخ به عنوان نیروی داخلی ازمحاسبات حذف می شود. $F-T+T-f_1-f_2=(m_1+m_2)a$

مطابق شکل روبه‌رو F نیروی به دستگاهی متشکل از دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 وارد می‌شود . اگر $F>(m_1+m_2)g$ دستگاه با شتاب ثابت بالا می‌رود .اگر $F=(m_1+m_2)g$ دستگاه با سرعت ثابت حرکت می‌کند .اگر $F<(m_1+m_2)g$ دستگاه با شتاب ثابت پایین می‌آید .

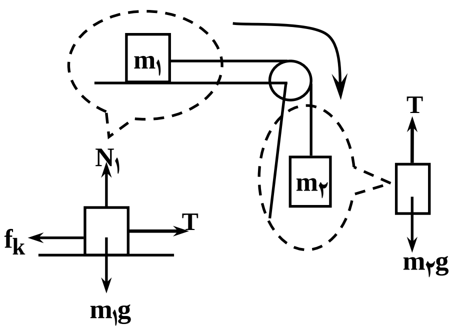


$$\begin{cases} F>(m_1+m_2)g \Rightarrow F-T-m_1g=m_1a \\ F=(m_1+m_2)g \Rightarrow F=T+m_1g \\ F<(m_1+m_2)g \Rightarrow m_1g+T-F=m_1a \end{cases}$$

کل دستگاه
$$\begin{cases} F>(m_1+m_2)g \Rightarrow F-m_1g-m_2g=(m_1+m_2)a \\ F=(m_1+m_2)g \Rightarrow F=m_1g+m_2g \\ F<(m_1+m_2)g \Rightarrow m_1g+m_2g-F=(m_1+m_2)a \end{cases}$$

$$\begin{cases} F>(m_1+m_2)g \Rightarrow T-m_2g=m_2a \\ F=(m_1+m_2)g \Rightarrow T=m_2g \\ F<(m_1+m_2)g \Rightarrow m_2g-T=m_2a \end{cases}$$

مطابق شکل، دو وزنه توسط نخ سبکی به یک‌دیگر متصلند . در این دستگاه نیروی کشش نخ داخلی است . نیروهای داخلی در شتاب گرفتن اجزای دستگاه موثر بوده ولی در شتاب حرکت دستگاه موثر نمی‌باشد . تنها نیروهای خارجی شتاب دهندهٔ دستگاه هستند .عاملی که باعث حرکت دستگاه می‌شود ، وزن m_2g و عاملی که با حرکت دستگاه مخالفت می‌کند ، f_k است .

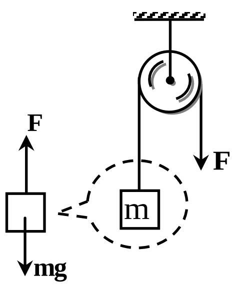


$$m_2g>f_k \Rightarrow \begin{cases} T-f_k=m_1a \\ m_2g-T=m_2a \\ m_2g-f_k=(m_1+m_2)a \end{cases}$$

$m_2g=f_k \Rightarrow$ دستگاه با سرعت ثابت حرکت می‌کند .

$m_2g<f_k \Rightarrow$ دستگاه ساکن می‌ماند .

قرقره‌ی ثابت: قرقرهٔ ثابت جابه‌جایی نداشته و تنها دوران می‌کند.در قرقره‌های ثابت اندازه‌ی نیرو ثابت مانده و تنها جهت نیرو عوض می‌شود . هنگامی که از قرقرهٔ ثابت استفاده می‌کنیم ، برای بلند کردن یک جسم باید نیرو به سمت پایین وارد کنیم . شکل روبه‌رو یک قرقرهٔ ثابت را نشان می‌دهد ، با این قرقره می‌خواهیم جسمی را در راستای قائم جابه‌جا کنیم .

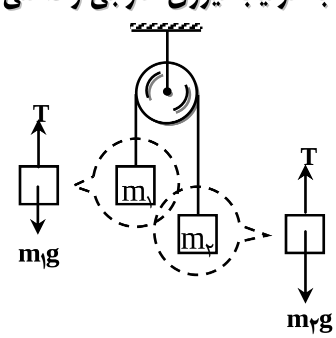


$F>mg \Rightarrow F-mg=ma$ وزنه بالا می‌رود .

$F<mg \Rightarrow mg-F=ma$ وزنه پایین می‌آید .

$F=mg$ وزنه ساکن بوده یا با سرعت ثابت حرکت می‌کند .

ماشین آتوود: از یک قرقره‌ی ساکن و سبک ، نخ سبکی که از شیار قرقره عبور کرده و دو وزنه m_1 و m_2 را به هم متصل می‌کند، تشکیل شده است . چون جرم وزنه‌ها برابر نمی‌باشد ، بعد از رها کردن وزنه‌ها ، دستگاه از حال سکون شروع به حرکت نموده و شتاب حرکت وزنه‌ها یکسان بوده وکشش نخ در تمام طول نخ ثابت می‌باشد . در ماشین آتوود نیروی وزن و نیروی کشش نخ به ترتیب نیروی خارجی و داخلی می‌باشند .

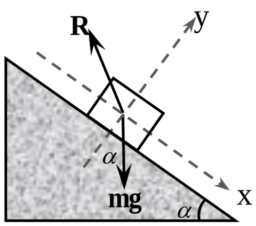


$$m_2>m_1 \Rightarrow \begin{cases} T-m_1g=m_1a \\ m_2g-T=m_2a \end{cases} \xrightarrow{\text{کل دستگاه}} m_2g-m_1g=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}g$$

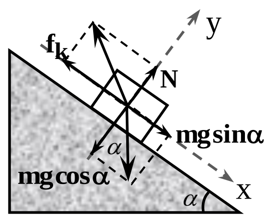
چون جرم وزنهٔ دوّم بیش‌تر است ، پس وزنه‌ی m_2 پائین آمده و وزنهٔ m_1 بالا می‌رود .

اگر شتاب دستگاه را در یکی از معادلات مربوط به m_1 یا m_2 قرار دهیم ، نیروی کشش نخ برابر است با :

$$T-m_1g=m_1\times\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}g \Rightarrow T=m_1g\times(1+\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}) \Rightarrow T=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$$



محاسبه شتاب بر روی سطح شیبدار: در شکل مقابل جسمی به جرم m را در بالای سطح شیبدار با اصطکاکی که با افق زاویه‌ی α می‌سازد قرار داده تا در اثر نیروی وزنش به طرف پائین سطح حرکت کند . نیروهای وارد بر جسم نیروی وزن (mg) و عکس العمل سطح (R) می‌باشد . با انتخاب محورهای مختصات x و y (که یکی از آنها در راستای حرکت و دیگری عمود بر راستای حرکت است) مولفهٔ افقی (مماسی) عکس العمل سطح (نیروی اصطکاک f) و مولفهٔ عمودی عکس العمل سطح (نیروی عمودی سطح N) و مولفهٔ افقی وزن $(mg\sin\alpha)$ و قائم وزن $(mg\cos\alpha)$ را رسم می کنیم .

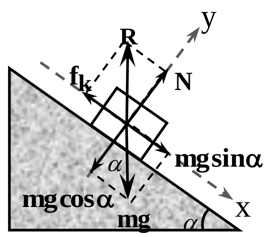


$$\left.\begin{array}{l}\sum F_y=0 \Rightarrow N-mg\cos\alpha=0 \Rightarrow N=mg\cos\alpha \\ \sum F_x=ma_x \Rightarrow mg\sin\alpha-f_k=ma_x \Rightarrow mg\sin\alpha-\mu_k N=ma_x\end{array}\right\} \Rightarrow a_x=g(\sin\alpha-\mu_k\cos\alpha)$$

$$\mu_k=0 \Rightarrow a_x=g\sin\alpha$$

نتیجه : شتاب حرکت روی سطح شیبدار که جسم در اثر نیروی وزنش بر روی آن پائین می آید، به جرم جسم بستگی ندارد.

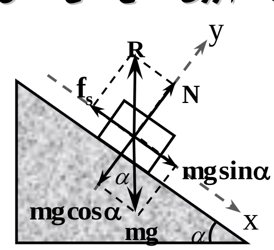
اگر جسمی به جرم m با سرعت ثابت v روی سطح شیب‌دار پایین بیاید ، نیروهای f_k و N با مولفه‌های نیروی وزن خنثی شده و جسم در حال تعادل است . نیروی عکس العمل سطح و ضریب اصطکاک در این حالت برابر است با :



$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x=0 \Rightarrow mg\sin\alpha=f_k \\ \sum F_y=0 \Rightarrow mg\cos\alpha=N\end{array}\right\} \xrightarrow{R=\sqrt{N^2+f_k^2}} R=\sqrt{(mg)^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}=mg$$

$$\tan\alpha=\frac{f_k}{N} \xrightarrow{f_k=\mu_k N} \tan\alpha=\mu_k$$

جسمی به جرم m روی سطح شیب‌داری به زاویه‌ی α ساکن است ، نیروی اصطکاک ایستایی (f_s) باعث شده که جسم روی سطح افقی ساکن بماند .



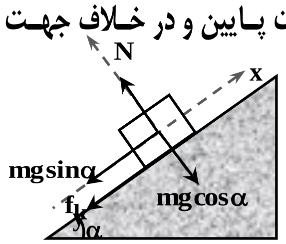
$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x=0 \Rightarrow mg\sin\alpha=f_s \\ \sum F_y=0 \Rightarrow mg\cos\alpha=N\end{array}\right\} \xrightarrow{R=\sqrt{N^2+f_s^2}} R=\sqrt{(mg)^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}=mg$$

$$\tan\alpha=\frac{f_s}{N} \xrightarrow{f_s=\mu_s N} \tan\alpha=\mu_s$$

تذکر: اگر جسم روی سطح شیب‌دار ساکن است : $f_s=mg\sin\alpha$

ولی اگر جسم روی سطح شیب‌دار ساکن بوده و در آستانهٔ حرکت قرار گیرد : $f_s=mg\sin\alpha=\mu_s N$

مطابق شکل روبه‌رو جسمی به جرم m را با سرعت اولیهٔ v_0 به طرف بالای سطح شیب‌دار با ضریب اصطکاک μ_k پرتاب می‌کنیم . اگر جهت حرکت به سمت بالا را مثبت در نظر بگیریم ، مولفه‌ی مماسی وزن و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح به سمت پایین و در خلاف جهت حرکت جسم می‌باشند . این نیروهای خلاف جهت حرکت باعث کاهش سرعت جسم می‌شود .



$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x=ma_x \Rightarrow 0-f_k-mg\sin\alpha=ma_x \\ \sum F_y=0 \Rightarrow mg\cos\alpha=N\end{array}\right\} \xrightarrow{f_k=\mu_k N=\mu_k mg\cos\alpha} 0-(mg\sin\alpha+\mu_k mg\cos\alpha)=ma_x$$

$$a_x=-g(\sin\alpha+\mu_k\cos\alpha) \xrightarrow{\mu_k=0} a_x=-g\sin\alpha$$

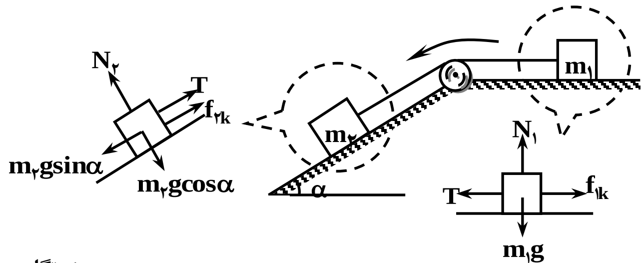
در اینجا نیز شتاب حرکت جسم به جرم جسم بستگی ندارد .

مسافتی که جسم طی کرده تا بایستد ، برابر است با :

$$v^2 - v_0^2 = 2a_x(x-x_0) \xrightarrow{v=0\ ,\ x_0=0} -v_0^2 = -2a_x x \Rightarrow x=\frac{-v_0^2}{2a_x} \xrightarrow{a_x=-g(\sin\alpha+\mu_k\cos\alpha)} x=\frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha+\mu_k\cos\alpha)}$$

$$\xrightarrow{\mu_k=0} x=\frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}$$

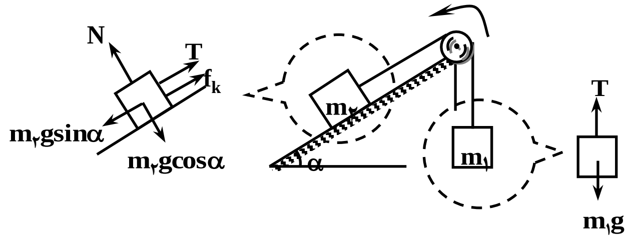
$$\begin{cases} N_2=m_2g\cos\alpha \Rightarrow f_{2k}=\mu_k N_2 \\ m_2g\sin\alpha - T - f_{2k}=m_2a \end{cases}$$



$$\begin{cases} N_1=m_1g \Rightarrow f_{1k}=\mu_kN_1=\mu_km_1g \\ T-f_{1k}=m_1a \end{cases}$$

دستگاه $m_2g\sin\alpha - f_{1k} - f_{2k}=(m_1+m_2)a$

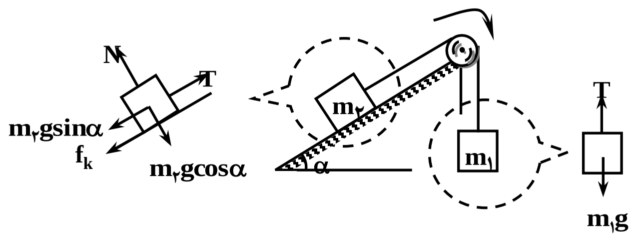
$$\begin{cases} N=m_2g\cos\alpha \Rightarrow f_k=\mu_kN \\ m_2g\sin\alpha - T - f_k=m_2a \end{cases}$$



$T-m_1g=m_1a$

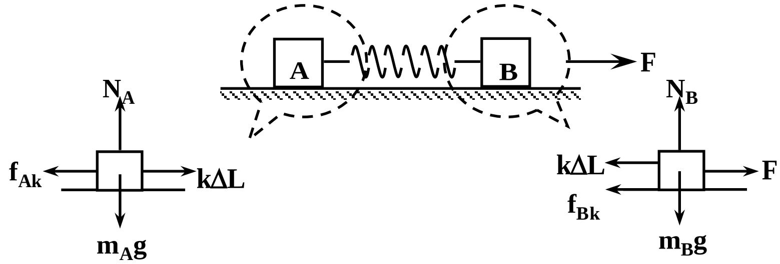
دستگاه $m_2g\sin\alpha - m_1g - f_k=(m_1+m_2)a$

$$\begin{cases} N=m_2g\cos\alpha \Rightarrow f_k=\mu_kN \\ T-m_2g\sin\alpha - f_k=m_2a \end{cases}$$



$m_1g-T=m_1a$

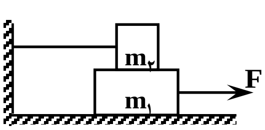
دستگاه $m_1g - m_2g\sin\alpha - f_k=(m_1+m_2)a$

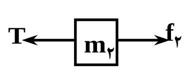


$N_A=m_Ag \xrightarrow{f_{Ak}=\mu_AN_A} k\Delta L - f_{Ak}=m_Aa$ $\qquad$ $N_B=m_Bg \xrightarrow{f_{Bk}=\mu_BN_B} F-k\Delta L-f_{Bk}=m_Ba$

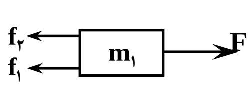
دستگاه $F-f_{Bk}-f_{Ak}=(m_A+m_B)a$

دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 مطابق شکل بر روی هم قرار دارند . می‌خواهیم با اعمال نیروی F جسم m_1 را از زیر جسم m_2 بیرون بکشیم . برای این کار باید بر اصطکاک بین دو جسم و اصطکاک سطح افقی غلبه کنیم . اصطکاک بین دو وزنه باعث کشیده شدن نخ می‌شود .



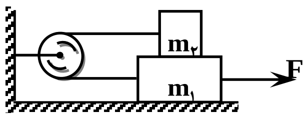


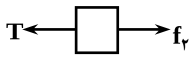
$f_2=\mu N_2=\mu m_2g\ ,\ T=f_2$



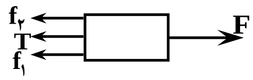
$f_1=\mu N_1=\mu(m_1+m_2)g\ ,\ F-f_1-f_2=m_1a$

در شکل مقابل با اعمال نیروی F وزنه‌های m_1 و m_2 با یک شتاب ولی در جهت مخالف هم به حرکت در می‌آیند . نیروی اصطکاک بین دو وزنه با حرکت m_1 و m_2 مخالفت می‌کند .



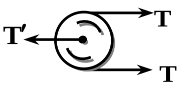


$$f_2=\mu N_2=\mu m_2 g\ ,\ T-f_2=m_2 a$$



$$f_1=\mu N_1=\mu(m_1+m_2)g\ ,\ F-f_1-f_2-T=m_1 a$$

نیروی کشش نخی که قرقره را به دیوار متصل می‌کند ، برابر است :

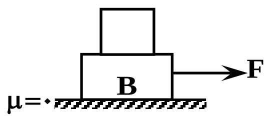


$$T'=2T$$

دستگاه $F-f_1-2f_2=(m_1+m_2)a$

نیروی اصطکاک همیشه مخالف حرکت نمی‌باشد ، در مواردی که دو جسم روی یک‌دیگر قرار دارند و تنها بر یکی از آن‌ها نیرو وارد می‌شود ، عامل حرکت جسم دیگر اصطکاک میان دو جسم می‌باشد .

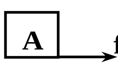
در شکل روبه‌رو نیروی F به وزنهٔ B که در زیر وزنهٔ A قرار دارد ، وارد می‌شود . B با سطح افقی اصطکاک نداشته و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین دو وزنه به ترتیب μ_s و μ_k می‌باشد .



عاملی که باعث حرکت وزنهٔ A می‌شود ، نیروی اصطکاک بین دو وزنه است .

ابتدا فرض می‌کنیم که دو وزنه نسبت به هم ساکن بوده و با شتاب یکسان a حرکت می‌کنند . $F=(m_1+m_2)a$

نیروی اصطکاک بین دو وزنه باعث حرکت وزنهٔ A با شتاب a می‌شود .

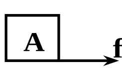


$f_A=m_A a$

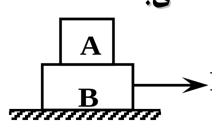
این نیرو را با ماکزیمم نیروی اصطکاک ایستایی (آستانه حرکت $f_{smax}=\mu_s N_A=\mu_s m_A g$) بین دو وزنه ، مقایسه می‌کنیم .

اگر $f_A\le f_{smax}$ باشد : وزنه‌ها با هم حرکت کرده ودارای شتاب ثابت a هستند . $F=(m_1+m_2)a$

اگر $f_A>f_{smax}$ باشد : وزنه‌ها جدا از هم حرکت نموده و دارای شتاب متفاوت می‌باشند .

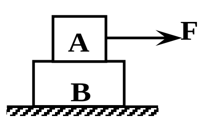


$f_A=m_A a_A$



$F=(m_B+m_A)a_B$

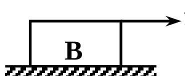
در شکل روبه‌رو نیروی F به وزنهٔ A که در روی وزنهٔ B قرار دارد ، وارد می‌شود . B با سطح افقی اصطکاک نداشته و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین دو وزنه به ترتیب μ_s و μ_k می‌باشد .



عاملی که باعث حرکت وزنهٔ B می‌شود ، نیروی اصطکاک بین دو وزنه است .

$\mu=0$

ابتدا فرض می‌کنیم که دو وزنه نسبت به هم ساکن بوده و با شتاب یکسان a حرکت می‌کنند . $F=(m_1+m_2)a$



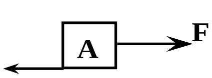
$f_A=m_B a$

نیروی اصطکاک بین دو وزنه باعث حرکت وزنهٔ B با شتاب a می‌شود .

این نیرو را با ماکزیمم نیروی اصطکاک ایستایی (آستانه حرکت $f_{smax}=\mu_s N_A=\mu_s m_A g$) بین دو وزنه ، مقایسه می‌کنیم .

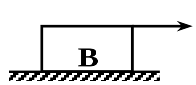
اگر $f_A\le f_{smax}$ باشد : وزنه‌ها با هم حرکت کرده و دارای شتاب ثابت a هستند . $F=(m_1+m_2)a$

اگر $f_A>f_{smax}$ باشد : وزنه‌ها جدا از هم حرکت نموده و دارای شتاب متفاوت می‌باشند .



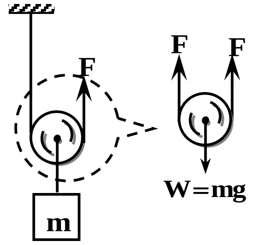
$f_k=\mu_k N_A$

$$F-f_k=m_A a_A$$



$f_A=\mu_k N_A=m_B a_B$

قرقرهٔ متحرک: قرقرهٔ متحرک با ثابت نگه داشتن جهت ، مقدار نیرو را افزایش می‌دهد . شکل زیر قرقرهٔ متحرکی را نشان می‌دهد که با وارد کردن نیروی F به سمت بالا جسمی به جرم m در راستای قائم حرکت داده می‌شود .



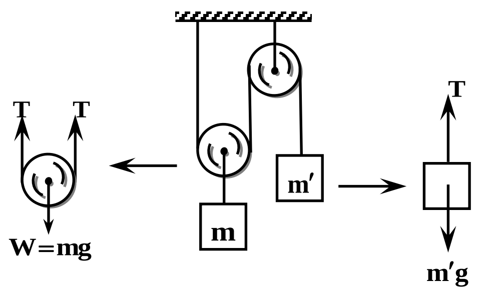
اگر دستگاه در حال تعادل (ساکن یا سرعت ثابت) است : $۲F=W \Rightarrow F=\frac{W}{۲}$

اگر دستگاه با شتاب بالا رود : $۲F-mg=ma$

اگر دستگاه با شتاب پایین بیاید : $mg-۲F=ma$

اگر بخواهیم وزنه به اندازه‌ی L بالا بیاید، باید نخ را به اندازه‌ی ۲L بکشیم.

در شکل روبه‌رو اگر وزنهٔ m با شتاب a حرکت کند ، شتاب حرکت m′ برابر ۲a است .



تعادل $\begin{cases} m:\ mg=۲T \\ m':\ T=m'g \end{cases} \Rightarrow mg=۲m'g \Rightarrow m=۲m'$

$m>۲m' \Rightarrow \begin{cases} mg-۲T=ma \\ T-m'g=۲m'a \end{cases}$

$m<۲m' \Rightarrow \begin{cases} ۲T-mg=ma \\ m'g-T=۲m'a \end{cases}$

وزن ظاهری در داخل آسانسور

عددی که باسکول در داخل آسانسور نشان می‌دهد را وزن ظاهری گویند . وزن ظاهری همان نیروی عکس‌العمل کف آسانسور است. وزن ظاهری در داخل آسانسور از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

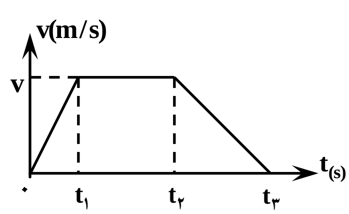
وزن ظاهری $N=m(g\pm a)$

$N>mg$:
- آسانسور که ساکن است بطرف بالا شروع به حرکت نماید (تند شونده رو به بالا حرکت کند)
- آسانسور در حین پائین آمدن بایستد . (کند شونده رو به پائین حرکت کند)

$N<mg$:
- آسانسور در حین بالا رفتن بایستد . (کند شونده رو به بالا حرکت کند)
- آسانسور که ساکن است بطرف پائین شروع به حرکت نماید (تند شونده رو به پائین حرکت کند)

اگر آسانسور ساکن باشد یا با سرعت ثابت حرکت کند ، وزن ظاهری با وزن واقعی برابر است $(N=mg)$.اگر کابل آسانسور پاره شده و آسانسور سقوط آزاد نماید ، وزن ظاهری (نیروی عمودی سطح) صفر شده و برای شخص احساس بی وزنی رُخ می‌دهد . در بی وزنی ، وزن از بین نمی‌رود بلکه نیروی عمودی سطح صفر می‌شود .

نمودار سرعت- زمان بالا آمدن یک آسانسور به صورت روبه‌رو می‌باشد .

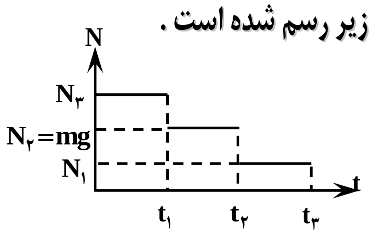


در بازهٔ زمانی $t_۰=۰$ تا $t_۱$ حرکت تند شونده : $N>mg$

در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ حرکت یکنواخت : $N=mg$

در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$ حرکت کند شونده : $N<mg$

نمودار نیروی عمودی سطح بر حسب زمان در درون آسانسوری که به طرف بالا حرکت می‌کند ، به‌صورت زیر رسم شده است .



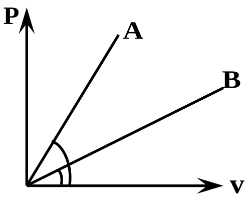
در بازهٔ زمانی $t_۰=۰$ تا $t_۱$ حرکت تند شونده : $N_۳>mg$

در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ حرکت یکنواخت : $N_۲=mg$

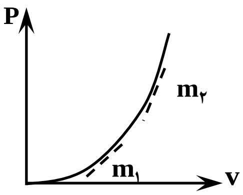
در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$ حرکت کند شونده : $N_۱<mg$

تکانه (اندازه حرکت) : وقتی یک جسم در اثر ضربه‌ای به حرکت در می‌آید ، کمیتی به نام تکانه در آن تغییر می‌کند .حاصل‌ضرب جرم یک جسم در سرعت آنرا ($P=mv$) تکانه یا اندازه حرکت گویند . یکای آن در SI برابر kgm/s است .

رابطهٔ $P=mv$ نشان می‌دهد که در جرم ثابت تکانه نسبت مستقیم با سرعت جسم دارد . شیب نمودار تکانه بر حسب سرعت برابر جرم جسم است .



$$\tan\theta=\frac{P}{v}=\overset{\text{ثابت}}{m} \Rightarrow \frac{\tan\theta_A}{\tan\theta_B}=\frac{m_A}{m_B}$$



$$\tan\theta_۲>\tan\theta_۱ \Rightarrow m_۲>m_۱$$

چون جرم یک کمیت نرده‌ای و مثبت است ، پس تکانه($\vec{P}=m\vec{v}$) و سرعت هم جهت هستند .

$$\vec{P}=m\vec{v}=m(v_x\vec{i}+v_y\vec{j})=(mv_x)\vec{i}+(mv_y)\vec{j}=P_x\vec{i}+P_y\vec{j}\ ,\ P=mv=\sqrt{P_x^۲+P_y^۲}\ ,\ \tan\theta=\frac{P_y}{P_x}$$

تغییر تکانه: تغییرات بردار سرعت باعث تغییرات تکانه می‌شود . بردار تغییر تکانه هم جهت با بردار تغییر سرعت است .

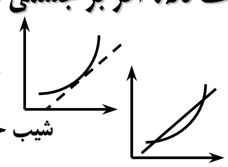
$$\Delta\vec{P}=\vec{P}_۲-\vec{P}_۱=m\vec{v}_۲-m\vec{v}_۱=m(\vec{v}_۲-\vec{v}_۱)=m\Delta\vec{v}$$

برای محاسبهٔ تغییر تکانه ، ابتدا تغییر بردار سرعت را حساب کرده ، سپس اندازهٔ تغییر سرعت را در رابطه قرار دهید .

قوانین نیوتن با توجه به تعریف تکانه: اگر بر جسمی نیرویی وارد شود ، آن جسم در جهت نیروی وارده شتاب می‌گیرد .

نیروی لحظه‌ای $\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt} \Rightarrow \vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$ شیب خط مماس بر نمودار $P-t$

نیروی متوسط $\overline{F}=m\overline{a} \Rightarrow \overline{F}=m\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\Delta mv}{\Delta t} \Rightarrow \overline{F}=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ شیب خط بین دو نقطه از نمودار $P-t$

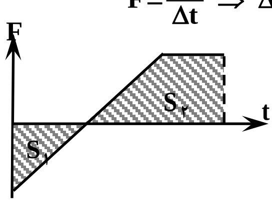


قانون اول نیوتن: اگر تکانهٔ یک جسم ثابت باشد ، برآیند نیروهای وارد بر آن جسم صفر است . $P=\text{ثابت} \Rightarrow \sum F=\frac{dP}{dt}=۰$

قانون دوم نیوتن: برآیند نیروهای وارد بر یک جسم برابر آهنگ تغییر تکانهٔ آن جسم است . $\sum F=\frac{dP}{dt}$

ضربه: حاصل‌ضرب نیرو در مدت اثر نیرو را ضربه گویند (ضربه همان تغییرات تکانه است) . یکای آن N.S یا kgm/s است . در اثر ضربه به جسمی که ساکن یا در حال حرکت است ، تغییر سرعت (Δv) و در نتیجه تغییر تکانه بوجود می‌آید . $F=\frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow \Delta P=F.\Delta t$

سطح زیر نمودار نیرو ـ زمان برابر تغییرات تکانه است.

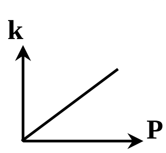


$$S_{P-t}=S_۱+S_۲=\Delta P$$
$$S_۱<۰\ ,\ S_۲>۰$$

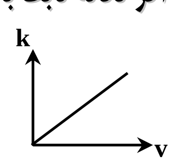
رابطه‌ی بین انرژی جنبشی و تکانه

$$k=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{۱}{۲}(mv)v=\frac{۱}{۲}Pv$$

اگر سرعت ثابت باشد ، انرژی جنبشی متناسب با تکانه است . اگر تکانه ثابت باشد ، انرژی جنبشی متناسب با سرعت است .



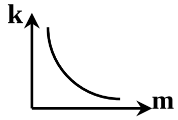
شیب نمودار $\tan\alpha=\frac{k}{P}=\frac{۱}{۲}v$



شیب نمودار $\tan\alpha=\frac{k}{v}=\frac{۱}{۲}P$

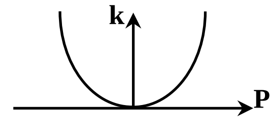
$$k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{(mv)^2}{2m}=\frac{P^2}{2m}$$

اگر تکانه ثابت باشد ، انرژی جنبشی نسبت عکس با جرم جسم دارد . اگر جرم ثابت باشد ، انرژی جنبشی متناسب با مجذور تکانه است .



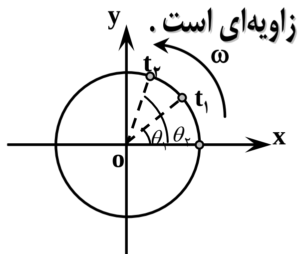
سطح زیر نمودار

$$S_{k-m}=k\times m=\frac{P^2}{2}$$



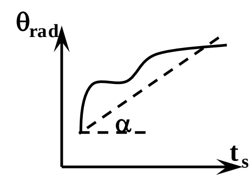
حرکت دایره‌ای: نمونه‌ای از حرکت در صفحه (دو بُعد) بوده که بر روی مسیر دایره‌ای انجام می‌گیرد .

سرعت زاویه‌ای متوسط : در شکل زیر حرکت ذرّه‌ای بر مسیر دایره‌ای نشان داده شده است ، مکان ذرّه در هر لحظه زاویهٔ θ نسبت به افق می‌سازد ، θ را مکان زاویه‌ای گویند . اگر در لحظات t_1 و t_2 مکان زاویه‌ای θ_1 و θ_2 باشد ، $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$ را جابه‌جایی زاویه‌ای یا تغییر مکان زاویه‌ای گویند . سرعت زاویه‌ای متوسط در حرکت دایره‌ای برابر جابه‌جایی(تغییر مکان) زاویه‌ای در واحد زمان است . واحد سرعت زاویه‌ای رادیان بر ثانیه است . در حرکت پادساعتگرد بر روی مسیر دایره‌ای سرعت زاویه‌ای مثبت و در حرکت ساعتگرد بر روی مسیر دایره‌ای سرعت زاویه‌ای منفی است . شیب خط بین دو نقطه از نمودار مکان زاویه‌ای بر حسب زمان برابر سرعت متوسط زاویه‌ای است .



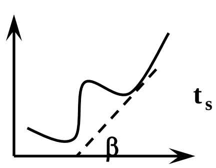
$$\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\theta_2-\theta_1}{t_2-t_1}=\tan\alpha\ ,\ (\frac{rad}{s})$$

$$\theta_2-\theta_1=\bar{\omega}t\rightarrow\theta_2=\bar{\omega}t+\theta_1$$



سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای : هر چه قدر بازهٔ زمانی Δt کوچک‌تر باشد سرعت زاویه‌ای متوسط به لحظه‌ای نزدیک‌تر بوده و در حد ، برابر یک‌دیگر می‌باشند .

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}=\tan\beta$$



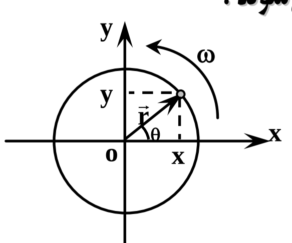
سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای برابر است با : ۱- سرعت زاویه‌ای در هر لحظه

۲- حدّ سرعت زاویه‌ای متوسط وقتی $\Delta t\to 0$

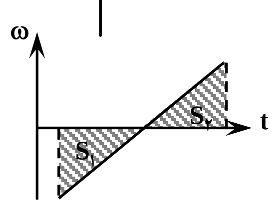
۳- مشتق مکان زاویه‌ای بر حسب زمان

٤- شیب خط مماس بر نمودار مکان زاویه‌ای بر حسب زمان

در حرکت دایره‌ای مرکز دایره و شعاع دایره به ترتیب ، مبداء مختصات و بردار مکان حرکت ذره درنظر گرفته می‌شوند .



$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}\xrightarrow{x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta}\vec{r}=(r\cos\theta)\vec{i}+(r\sin\theta)\vec{j}$$



شیب نمودار $\theta-t$ برابر سرعت زاویه‌ای و سطح زیر نمودار $\omega-t$ برابر تغییر مکان (جابه‌جایی) زاویه‌ای است.

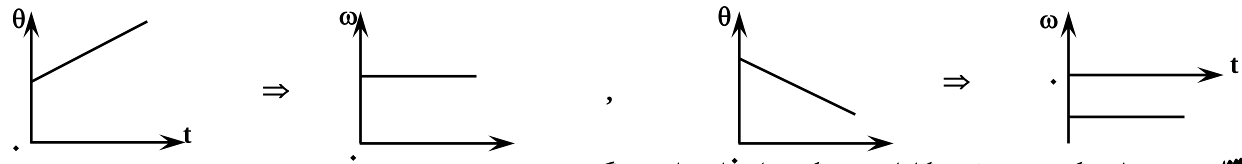
$$S_{\omega-t}=\omega\Delta t=\Delta\theta\quad ,\quad S_1<0\ ,\ S_2>0$$

حرکت دایره‌ای یکنواخت

هرگاه سرعت زاویه‌ای حرکت روی مسیر دایره‌ای ثابت بوده و در هر بازهٔ زمانی دلخواه سرعت زاویه‌ای متوسط برابر لحظه‌ای باشد ، حرکت را دایره‌ای یکنواخت گویند .

$$\bar{\omega}=\omega=\frac{\theta-\theta_0}{t} \Rightarrow \theta-\theta_0=\omega t \Rightarrow \theta=\omega t+\theta_0$$

در حرکت دایره‌ای یکنواخت معادلهٔ مکان زاویه‌ای بر حسب زمان خط راست با شیب ثابت است ، که شیب آن برابر سرعت زاویه‌ای است .



دوره یا دوره‌ی تناوب: زمان یک‌دور چرخش کامل در حرکت دایره‌ای را دوره گویند . $(T_{(s)})$

بسامد: تعداد دورهای کامل در واحد زمان را بسامد گویند . $(f_{(Hz)})$ واحد آن عکس ثانیه یا هرتز است .

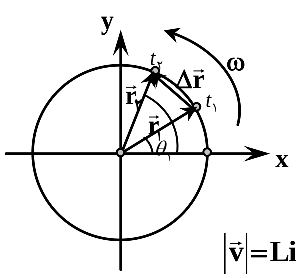
با توجه به تعریف دوره و بسامد می‌توان نوشت :

تعداد دور کامل	زمان
N	t

$$\left.\begin{matrix}1 & T\\ f & 1\end{matrix}\right\} fT=1 \Rightarrow f=\frac{1}{T} \qquad \left.\begin{matrix}N & t\\ 1 & T\end{matrix}\right\} t=NT \Rightarrow T=\frac{t}{N}\ ,\ f=\frac{N}{t}$$

با توجه به تعریف سرعت زاویه‌ای می‌توان نوشت : $\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta\theta=2\pi\ ,\ \Delta t=T}\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$ یک دور چرخش کامل

سرعت خطی در حرکت دایره‌ای: دیدیم که جابه‌جایی در واحد زمان برابر سرعت متوسط است . $\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$



سرعت لحظه‌ای برابر است با : $\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

در بازهٔ زمانی Δt ذرّه در مسیر دایره‌ای کمان Δs را طی می‌کند ، اگر بازه‌ی زمانی Δt کوچک باشد ، کمان Δs کوچک‌تر شده و تقریباً برابر وتر مقابل به آن یعنی $|\Delta\vec{r}|$ می‌شود .

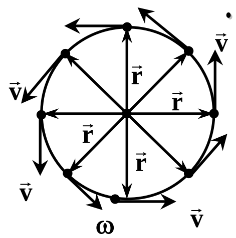
$$|\vec{v}|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}$$

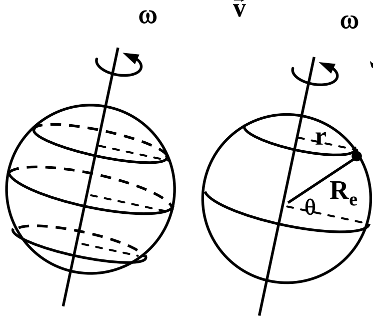
اندازه‌ی یک زاویه بر حسب رادیان برابر نسبت طول کمان مقابل به آن زاویه به شعاع دایره است . $\theta=\frac{s}{r} \Rightarrow s=r\theta$

بردار سرعت همواره بر مسیر حرکت دایره‌ای مماس است . $v=r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v=r\omega$

چون در حرکت دایره‌ای یکنواخت سرعت زاویه‌ای ثابت است ، پس در شعاع مشخص سرعت خطی نیز ثابت است .

در حرکت دایره‌ای بردار سرعت بر بردار مکان عمود است .



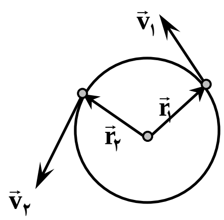


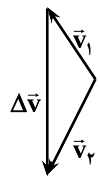
با تغییر شعاع دوران ، سرعت زاویه‌ای ثابت مانده ولی سرعت خطی دوران تغییر می‌کند . در تمام نقاط سطح زمین سرعت زاویه‌ای ثابت بوده ولی سرعت خطی متفاوت است . بیش‌ترین سرعت خطی زمین در استوا و کم‌ترین سرعت خطی زمین در قطبین زمین است . هر چه قدر از استوا دورتر شده و به قطبین نزدیک شویم ، شعاع دوران حول محور زمین کم‌تر شده پس سرعت خطی نیز کم‌تر می‌شود . اگر از سمت ستارهٔ قطبی به زمین نگاه کنیم ، حرکت وضعی زمین پادساعتگرد است .

سرعت خطی در نقطه‌ای واقع در عرض جغرافیایی θ یا θ درجه شمالی به صورت زیر به دست می‌آید :

$$v=r\omega \xrightarrow{r=R_e\cos\theta} v=R_e\omega\cos\theta \xrightarrow[\text{استوا}]{v_m=R_e\omega} v=v_m\cos\theta$$

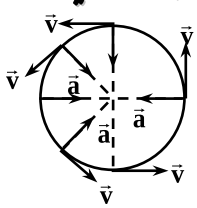
شتاب در حرکت دورانی یکنواخت: ذرّه‌ای را در نظر بگیرید که دارای حرکت دایره‌ای یکنواخت است ، بردار سرعت آن در هر لحظه مماس بر مسیر حرکت یعنی مماس بر دایره می‌باشد . در لحظهٔ t_1 و t_2 بردارهای مکان $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ و بردارهای سرعت $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ می‌باشد . در هر لحظه بردار مکان و بردار سرعت بر هم عمودند (مماس بر دایره بر شعاع عمود است) . تغییر بردار سرعت در مسیر دایره‌ای ایجاد شتاب می‌کند. اندازهٔ شتاب متوسط $|\bar{\vec{a}}|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t}$ بوده و وقتی Δt به سمت صفر میل می‌کند ، شتاب لحظه‌ای برابر است با :

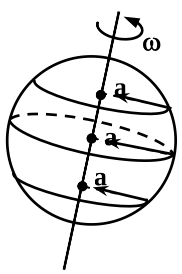




$$a=\frac{v^2}{r}\xrightarrow{v=r\omega}a=r\omega^2\xrightarrow{v=r\omega}a=v\omega$$

در حرکت دایره‌ای، تغییرات سرعت و در نتیجه بردار شتاب در راستای شعاع دایره‌ی دوران و متوجه مرکز دوران است. این شتاب را شتاب مرکزگرا گویند.

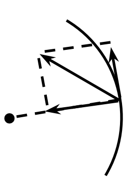




در حرکت وضعی زمین شتاب مرکزگرا الزاماً در امتداد شعاع زمین نمی‌باشد . شتاب مرکزگرای زمین به سمت مرکز دایره‌ی دوران است . در استوا شتاب مرکزگرا در امتداد شعاع زمین است .

دینامیک دوران: در حرکت دایره‌ای به علت تغییر بردار سرعت ، حرکت شتاب‌دار است . طبق قانون دوّم نیوتن نیرویی باعث ایجاد این شتاب شده است ، این نیرو در جهت شتاب (مرکزگرا) می‌باشد . نیرو یا برآیند نیروهای وارد بر یک جسم در حرکت دایره‌ای در امتداد شعاع دوران و متوجه مرکز دوران است . جهت نیروهایی که به سمت مرکز دوران هستند ، مثبت در نظر گرفته می‌شود .

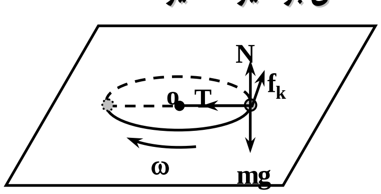
$$F=ma=m\frac{v^2}{r}=mr\omega^2=mv\omega$$ برآیند نیروهای متوجه مرکز دوران



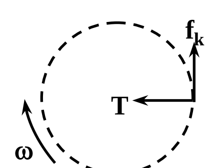
اگر نیرویی در راستای مرکز دوران نباشد ، آن را به دو مولفه یکی در راستای مرکز و دیگری مماس بر دایره‌ی دوران تجزیه می‌کنیم .

هر نیرو یا برآیند چندین نیرو می‌تواند مرکزگرا (جانب به مرکز) باشد .

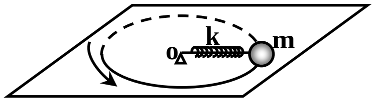
گلوله‌ای را به نخی به طول L بسته و در صفحهٔ افقی حول نقطه‌ی o دوران می‌دهیم ، تنها نیرویی که همواره در طول دوران متوجه‌ی مرکز دوران است ، نیروی کشش نخ می‌باشد . نیروهای وزن گلوله نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک مماس بر دایره مسیر هستند .



$$\boxed{T=ma=m\frac{v^2}{L}=mL\omega^2=mv\omega}$$

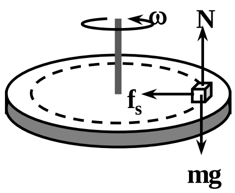


اگر به جای نخ ، فنری با ثابت k و طول عادی L. قرار داده و وزنه را در صفحهٔ افقی دوران دهیم ، نیروی جانب به مرکز نیروی کشسانی فنر است . تغییر طول فنر برابر ΔL و طول فنر به L می‌رسد .



$$F=k\Delta L=m\frac{v^2}{L}=mL\omega^2=mv\omega$$

مکعب کوچکی روی یک صفحهٔ دوار قرار داشته و همراه با آن دوران می‌کند . نیرویی که باعث دوران مهره همراه صفحه می‌شود ، نیروی اصطکاک ایستایی است .

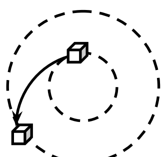


$$f_s=m\frac{v^2}{r}=mr\omega^2=mv\omega$$

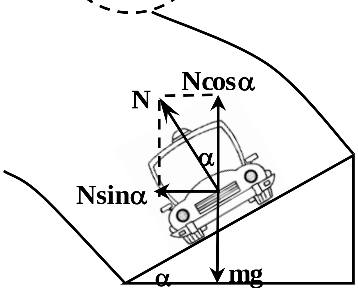
با افزایش سرعت دوران نیروی اصطکاک ایستایی افزایش یافته تا به آستانهٔ حرکت برسد .

$$f_s=\mu_s mg=m\frac{v^2}{r}=mr\omega^2 \Rightarrow \mu_s=\frac{v^2}{rg}$$

افزایش بیش‌تر سرعت دوران باعث حرکت مکعب و رفتن آن روی دایره‌ای به شعاع بیش‌تر می‌شود .



محاسبه‌ی شیب عرضی جاده :



مطابق شکل روبرو اتومبیلی پیچ جادهٔ شیب‌دار به زاویه‌ی α و شعاع R را با سرعت ثابت طی می‌کند . بر اتومبیل دو نیروی وزن و عکس العمل عمودی سطح وارد می‌شود .

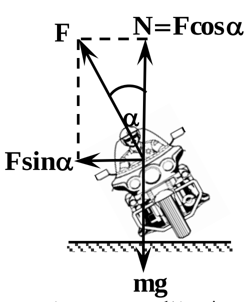
در راستای قائم ، مولفهٔ قائم نیروی عمودی سطح با نیروی وزن خنثی می‌شود : $N\cos\alpha=mg$

تنها ، مولفهٔ افقی نیروی عمودی سطح متوجه مرکز دوران می‌باشند : $N\sin\alpha=\frac{mv^2}{R}$

از تقسیم دو رابطه‌ی بالا بر یکدیگر شیب عرضی جاده بدست می‌آید . $\tan\alpha=\frac{v^2}{Rg}$ شیب عرضی جاده

سرعت v حداکثر سرعتی است که بدون در نظر گرفتن اصطکاک جاده ، متحرک می‌تواند داشته باشد ، تا پیچ جاده را طی نماید . وجود اصطکاک باعث می‌شود که با سرعت بیش‌تری بتوان پیچ جاده را طی نمود .

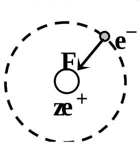
در اثر سرعت زیاد، شعاع دوران افزایش یافته که باعث پرت شدن به سمت خارج پیچ می‌شود.



موتورسوار برای ایجاد تعادل در سر پیچ ، خود را به طرف داخل پیچ خَم می‌کند ، نیروی عکس‌العمل سطح در این حالت برابر است با : (از اصطکاک سطح افقی صرف‌نظر می‌شود)

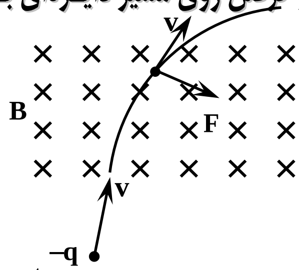
$$\left.\begin{array}{r} F\sin\alpha=\frac{mv^2}{r} \\ F\cos\alpha=mg \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{v^2}{rg}$$

در دوران الکترون به دور هسته تنها نیرویی که در طول مسیر متوجه مرکز دوران است ، نیروی جاذبهٔ کولنی بین بار منفی الکترون و بار مثبت هسته است . e^- الکترون ، e^+ پروتون ، Z تعداد پروتون هسته



$$F=\frac{kze^2}{r^2}=\frac{mv^2}{r} \Rightarrow v=\sqrt{\frac{kze^2}{mr}}$$

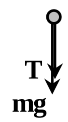
هنگامی که ذره‌ای با بار q به جرم m با سرعت v به طور عمود وارد میدان مغناطیسی به شدت B می‌شود ، نیرویی الکترومغناطیس وارده از طرف میدان بر بردار سرعت عمود بوده و مانند نیروی جانب بمرکز باعث انحراف بار از راستای حرکت و قرار گرفتن روی مسیر دایره‌ای به شعاع r می‌شود .



$$F=\frac{mv^2}{r}=qvB\sin 90^\circ \Rightarrow \frac{mv}{r}=qB \Rightarrow \overset{\text{تکانه}}{P}=mv=rqB$$

گلوله‌ای را به نخ سبکی بسته و آنرا در صفحهٔ قائم به دوران در می‌آوریم . نیروی جانب به مرکز در نقاط مختلف مسیر به صورت زیر محاسبه می‌شود :

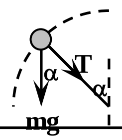
در دوران وزنه-نخ در صفحهٔ قائم ، سرعت دوران ثابت نمی‌باشد برای محاسبهٔ سرعت در هر نقطه می‌توان از رابطهٔ مستقل از زمان استفاده نمود .



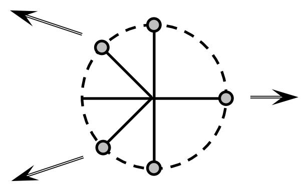
$$T+mg=m\frac{v^2}{r}$$

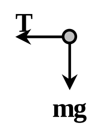
گلوله در این نقطه دارای سرعت و نیروی جانب بمرکز و نیروی کشش نخ کم‌تری نسبت به بقیهٔ نقاط است . در این نقطه اگر $T=0$ باشد ، جسم دارای کم‌ترین سرعت می‌باشد .

$$0+mg=m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v_{min}=\sqrt{rg}$$

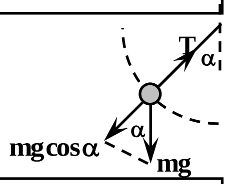


$$T+mg\cos\alpha=m\frac{v^2}{r}$$

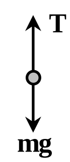




$$T=m\frac{v^2}{r}$$



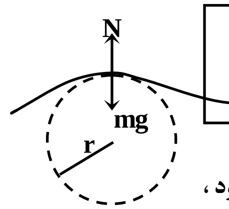
$$T-mg\cos\alpha=m\frac{v^2}{r}$$



$$T-mg=m\frac{v^2}{r}$$

در این نقطه گلوله دارای بیش‌ترین سرعت و بیش‌ترین نیروی جانب بمرکز و بیش‌ترین نیروی کشش نخ است .

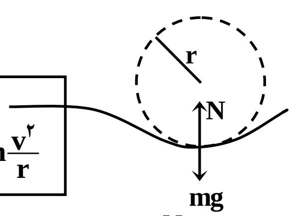
مطابق شکل زیر اتومبیلی با سرعت ثابت از روی پلی به شعاع r عبور می‌کند . نیروی عمودی سطح وقتی اتومبیل در وسط پل است ، به صورت زیر بدست می‌آید :



$$mg-N=m\frac{v^2}{r}$$

چون $N<mg$ اتومبیل از سطح فاصله می‌گیرد .

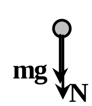
حداکثر سرعت اتومبیل برای آنکه از سطح جدا نشود ، برای حالتی است که : $N=0$ باشد . $(v_{max}=\sqrt{rg})$



$$N-mg=m\frac{v^2}{r}$$

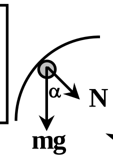
چون $N>mg$ اتومبیل از به سطح نزدیک می‌شود .

گلوله‌ای در درون کره‌ای به شعاع r مطابق شکل زیر در حال دوران است . نیروی عمودی سطح در نقاط مختلف به صورت زیر محاسبه می‌شود:

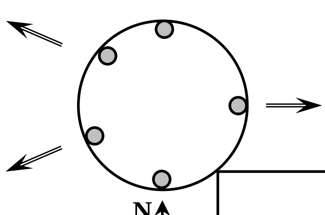


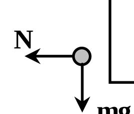
$$N+mg=\frac{mv^2}{r}$$

گلوله در این نقطه دارای سرعت و نیروی جانب بمرکز و نیروی عمودی سطح کم‌تری نسبت به بقیهٔ نقاط است . در این نقطه اگر $N=0$ باشد ، جسم دارای کم‌ترین سرعت می‌باشد . $v_{min}=\sqrt{rg}$

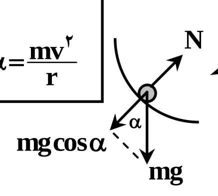


$$N+mg\cos\alpha=\frac{mv^2}{r}$$

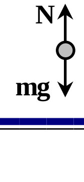




$$N=\frac{mv^2}{r}$$



$$N-mg\cos\alpha=\frac{mv^2}{r}$$



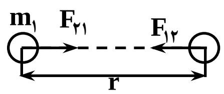
$$N-mg=\frac{mv^2}{r}$$

در این نقطه گلوله دارای بیش‌ترین سرعت و بیش‌ترین نیروی جانب بمرکز و بیش‌ترین نیروی عمودی سطح است .

اگر جسم با سرعت ثابت دایره را دور بزند تفاوت بین نیروی عمودی سطح در پایین و بالای مسیر $2mg$ است. اگر سرعت جسم ثابت نباشد، تفاوت بین نیروی جانب به مرکز در بالا و پایین مسیر $4mg$ و تفاوت بین نیروی عکس العمل سطح در پایین و بالای مسیر $6mg$ است.

نیروی گرانش نیوتن (نیروی وزن)

هر دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 در فاصلهٔ r با نیرویی در امتداد خط واصل دو جسم یک‌دیگر را می‌ربایند ، که با حاصل ضرب جرم دو جسم نسبت مستقیم و با مجذور فاصلهٔ دو جسم نسبت عکس دارد .



$$\left.\begin{array}{l} F\propto m_1m_2 \\ F\propto \frac{1}{r^2}\end{array}\right\} \Rightarrow F\propto\frac{m_1m_2}{r^2} \Rightarrow F=\frac{Gm_1m_2}{r^2}\ ,\ \underset{\text{ثابت جهانی گرانش}}{G}=6/67\times10^{-11}Nm^2/kg^2$$

با آن که جرم دو جسم برابر نمی‌باشد ، نیروی گرانشی یکسان بر هم وارد می‌کنند . $F_{12}=F_{12}$

نیروی گرانشی که از طرف زمین بر اجسام وارد می‌شود را نیروی وزن گویند.

اگر جسم روی سطح زمین باشد ، نیروی گرانشی برابر است با :

$$F=\frac{Gm_1m_2}{r^2}\xrightarrow{r=R_e}F=\frac{GmM_e}{R_e^2}=W$$

اگر جسم در فاصلهٔ h از سطح زمین باشد ، نیروی گرانشی برابر است با :

$$F=\frac{GmM_e}{(R_e+h)^2}=W$$

دو جسم به جرم‌های مساوی در فاصله‌ی r بر هم نیروی گرانشی F وارد می‌کنند . اگر $\frac{1}{n}$ جرم یکی را برداشته به دیگری اضافه کنیم، در همان فاصله نیرویی که بر هم وارد می‌کنند برابر است با :

$$F=\frac{Gmm}{r^2}\ ,\ F'=\frac{G(1-\frac{1}{n})m(1+\frac{1}{n})m}{r^2}=\frac{Gmm(1-\frac{1}{n^2})}{r^2}\Rightarrow F'=(1-\frac{1}{n^2})F$$

در اطراف هر جسم خاصیتی وجود دارد که اگر جسم دیگری در آن فضا قرار گیرد ، بر آن نیرو وارد می‌شود . این خاصیت را میدان گرانشی گویند . اندازه‌ی این میدان با کمیتی به نام شدت میدان تعریف می‌شود .

شدت میدان گرانشی: شدت میدان گرانشی در هر نقطه از میدان گرانش ، برابر نیرویی است که از طرف میدان به یکای جرم در آن نقطه وارد می‌شود . شدت میدان گرانشی در فاصله‌ی r از جرم M برابر است با :

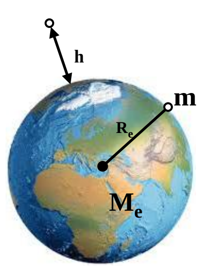
$$a=\frac{F}{m}\xrightarrow{F=G\frac{mM}{r^2}}a=G\frac{M}{r^2}$$

شدت میدان گرانش در اطراف یک جسم با جرم جسم نسبت مستقیم و با مجذور فاصله از آن نسبت عکس دارد .

شدت میدان گرانش در سطح زمـین برابـر اسـت بـا :

$$a=G\frac{M_e}{R_e^2}=9/8m/s^2=g \Rightarrow g\propto M_e\ ,\ g\propto\frac{1}{R_e^2}$$

شدت میدان گرانش در سطح هر سیاره به جرم سیاره و شعاع آن بستگی دارد .



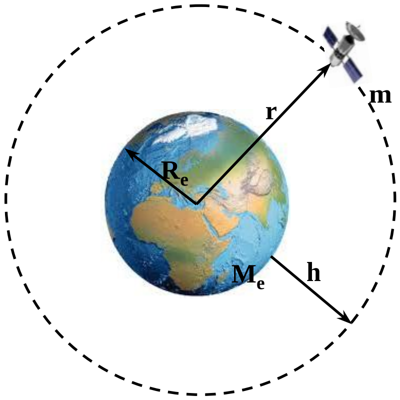
نیروی گرانشی در سطح زمین برابر وزن آن جسم است :

$$F=G\frac{mM_e}{R_e^2}\xrightarrow{g=G\frac{M_e}{R_e^2}}F=mg=W$$

شدت میدان گرانش در ارتفاع h از سطح زمین برابر است با :

$$g'=G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}\xrightarrow{g=G\frac{M_e}{R_e^2}}\frac{g'}{g}=(\frac{R_e}{R_e+h})^2$$

نیروی ربایش بین زمین و ماهواره عاملی برای گردش ماهواره به دور زمین می‌باشد . ماهواره‌ای به جرم m در فاصلهٔ r از مرکز زمین قرار دارد، نیروی جانب بمرکز برابر است با :



$$\text{نیروی جانب بمرکز = نیروی گرانش بین ماهواره و زمین} \Rightarrow F=G\frac{mM_e}{r^2}=\frac{mv^2}{r}$$

$$r=R_e+h \Rightarrow F=G\frac{mM_e}{(R_e+h)^2} \xrightarrow{g'=G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}} F=mg'$$

نیروی و شتاب جانب بمرکز ماهواره همان نیروی وزن و شدت میدان گرانش در محل ماهواره است.

سرعت خطی: در گردش ماهواره به دور زمین تنها نیرویی که در طول مسیر متوجه مرکز دوران است ، نیروی گرانشی بین زمین و ماهواره می‌باشد . پس نیروی گرانشی بین زمین و ماهواره همان نیروی مرکزگرا می‌باشد . (R_e شعاع زمین است .)

$$F=G\frac{mM_e}{r^2}=\frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2=G\frac{M_e}{r} \xrightarrow{g=G\frac{M_e}{R_e^2} \;\Rightarrow\; GM_e=gR_e^2} v=R_e\sqrt{\frac{g}{r}} \;,\; \frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{r_1=R_e+h_1}{r_2=R_e+h_2}}$$

شدت میدان گرانش در محل ماهواره همان شتاب گرانش زمین در محل ماهواره و همان شتاب جانب بمرکز ماهواره است .

$$a=g \xrightarrow{g=\frac{GM_e}{r^2}} a=\frac{GM_e}{r^2} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \xrightarrow{r_1=R_e+h_1 \;,\; r_2=R_e+h_2} \frac{a_2}{a_1}=\left(\frac{R_e+h_1}{R_e+h_2}\right)^2$$

با توجه به سرعت خطی در دوران یکنواخت می‌توان نوشت :

$$v=r\omega=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow T=\frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}=R_e\sqrt{\frac{g}{r}}} T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_e}}=\frac{2\pi}{R_e}\sqrt{\frac{r^3}{g}} \xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}} \omega=\sqrt{\frac{GM_e}{r^3}}=R_e\sqrt{\frac{g}{r^3}} \Rightarrow \frac{\omega}{\omega'}=\frac{T'}{T}=\sqrt{\left(\frac{r'}{r}\right)^3}$$

اگر بخواهیم که ماهواره، همواره در بالای یک نقطه مشخص از زمین قرار داشته باشد، باید دوره حرکت ماهواره برابر دوره‌ی حرکت زمین باشد. سرعت خطی و دوره‌ی حرکت ماهواره به دور زمین به جرم ماهواره بستگی ندارد.

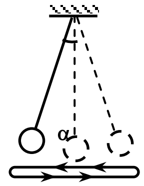
فضانوردی درون ماهواره روی صندلی نشسته است ، برآیند نیروهای وارد بر آن برابر است با :

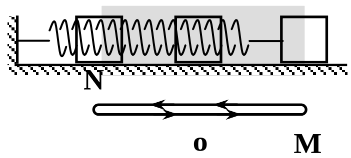
$$F-N=\frac{mv^2}{r} \xrightarrow[F=G\frac{mM_e}{r^2}]{v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}} G\frac{mM_e}{r^2}-N=\frac{m}{r}\times\frac{GM_e}{r} \Rightarrow N=0$$

چون نیروی عکس العمل تکیه‌گاه صفر است ، فضانورد درون ماهواره احساس بی وزنی می‌کند .

حرکت نوسانی (هماهنگ ساده)

در حرکت‌های دوره‌ای ، متحرک پس از طی زمان معینی به وضعیت اولیه برمی‌گردد و حرکت خود را از نو آغاز می‌کند . وقتی مسیر رفت و برگشت متحرک روی یک پاره خط حول نقطه‌ای واقع در وسط آن باشد، آن حرکت را حرکت نوسانی یا هماهنگ ساده گویند.گردش زمین بدور خورشید ، گردش ماه بدور زمین،ضربان قلب انسان ، ارتعاش تارها ، حرکت یک آونگ ساده ، حرکت وزنه‌ای که به یک فنر متصل است ، جزو حرکت‌های دوره‌ای می‌باشند . (حرکت آونگ ساده ، وقتی زاویه‌ی α خیلی کوچک باشد $(\tan\alpha \approx \sin\alpha)$)، همچنین بالا و پائین رفتن وزنهٔ آویخته به فنر، بر روی خط راست در دو طرف نقطهٔ o واقع در وسط مسیر)چنین دستگاهی را نوسانگر هماهنگ ساده گویند.





دوره یا دورهٔ تناوب: زمان یک نوسان کامل در حرکت هماهنگ ساده را ***دوره*** گویند . $(T_{(s)})$

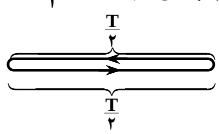
بسامد: تعداد نوسان‌های کامل در واحد زمان را ***بسامد*** گویند . $(f_{(Hz)})$ واحد آن عکس ثانیه یا هرتز است .

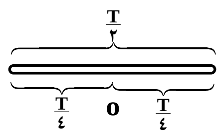
با توجه به تعریف دوره و بسامد می‌توان نوشت : (بسامد و دوره نسبت عکس دارند .)

تعداد دور کامل   زمان

$$\left.\begin{array}{cc} N & t \\ ۱ & T \\ f & ۱ \end{array}\right\} fT=۱ \Rightarrow f=\frac{۱}{T} \qquad \left.\begin{array}{cc} N & t \\ ۱ & T \end{array}\right\} t=NT \Rightarrow T=\frac{t}{N}\ ,\ f=\frac{N}{t}$$

نوسانگر با رفت و برگشت پاره خط نوسان ، یک نوسان کامل را در مدت T انجام می‌دهد . پس زمان رفت $\frac{T}{۲}$ و زمان برگشت $\frac{T}{۲}$ است .





اگر طول پاره خط نوسان را BB' بنامیم ، در هر نوسان (کامل) دو مرتبه طول پاره خط نوسان طی می‌شود . پس هر نوسان کامل از دو نوسان ساده تشکیل شده است . $N=\frac{\text{تعداد نوسان ساده}}{۲}$ تعداد نوسان کامل

بسامد زاویه‌ای

سرعت زاویه‌ای در هر حرکت دایره‌ای همان بسامد زاویه‌ای در حرکت نوسانی است . $\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{۲\pi}{T}=۲\pi f\ ,\ \frac{rad}{s}$

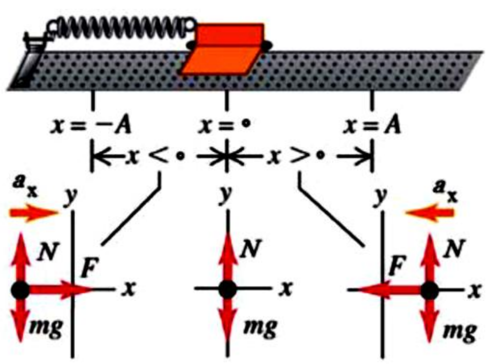
بسامد زاویه‌ای با دوره نسبت عکس $(\omega\propto\frac{۱}{T})$ و با بسامد نسبت مستقیم $(\omega\propto f)$ دارد ، پس حداقل بسامد زاویه‌ای مربوط به حداکثر دوره یا حداقل بسامد است .

دامنهٔ نوسان

بیش‌ترین فاصله از مرکز نوسان (x_{max}) را دامنهٔ نوسان گویند . دامنهٔ نوسان را با A نمایش داده و نصف طول پاره خط نوسان $A=\frac{BB'}{۲}$ است .

معادله حرکت نوسانی ساده

در شکل روبه‌رو وزنه m به فنری با ثابت k بسته شده و روی سطح افقی بدون اصطکاک نوسان می‌کند . اگر وزنه را از وضع تعادل خارج کرده و رها کنیم ، نیروی فنر در جهتی است که وزنه را به حالت تعادل برگرداند ، این نیرو را ***نیروی بازگردانندهٔ فنر*** گویند . نیروی برگردانندهٔ فنر طبق رابطهٔ هوک متناسب با تغییر طول فنر است : $F=-kx$ علامت منفی نشان می‌دهد که : *نیروی برگرداننده در خلاف جهت بردار مکان جسم می‌باشد .* هر دستگاهی که نیروی برگردانندهٔ آن از قانون هوک پیروی کند ، حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت . بنابر قانون دوّم نیوتن می‌توان نوشت :



$$F=ma=-kx \Rightarrow a=-\frac{k}{m}x$$

مشتق دوم مکان نسبت به زمان شتاب است : $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x \quad (I)$

یکی از جواب‌های این معادله ، تابع سینوسی $x=A\sin(\omega t)$ است .

$$x=A\sin(\omega t) \Rightarrow \frac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\sin(\omega t) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x \quad (II)$$

از مقایسه روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت که : $\omega^2=\frac{k}{m} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که دوره یا بسامد نوسان دستگاه وزنه- فنر برابر است با : $\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \begin{cases} T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$

دوره و بسامد نوسان وزنه- فنر به دامنه و فاز حرکت نوسانی بستگی نداشته ولی به جرم متصل به فنر و ثابت فنر بستگی دارد .

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{f_1}{f_2}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}\times\frac{k_1}{k_2}}$$

در معادلهٔ حرکت نوسانی ساده $x=A\sin(\omega t)$:

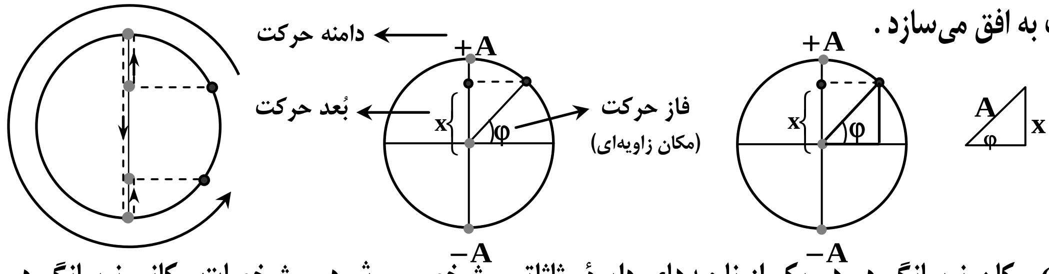
x بُعد حرکت (فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان در هر لحظه) ، A را دامنهٔ حرکت نوسانی (بُعد ماکزیمم ــ بیش‌ترین فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان $A=x_{max}$) و ωt را فاز حرکت نوسانی (φ) گویند .

اگر در لحظهٔ t_1 و t_2 فاز حرکت به ترتیب ωt_1 و ωt_2 باشد ، تغییر فاز ایجاد شده در بازهٔ زمانی $\Delta t=t_2-t_1$ برابر است با :

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\omega t_2-\omega t_1=\omega\Delta t$$

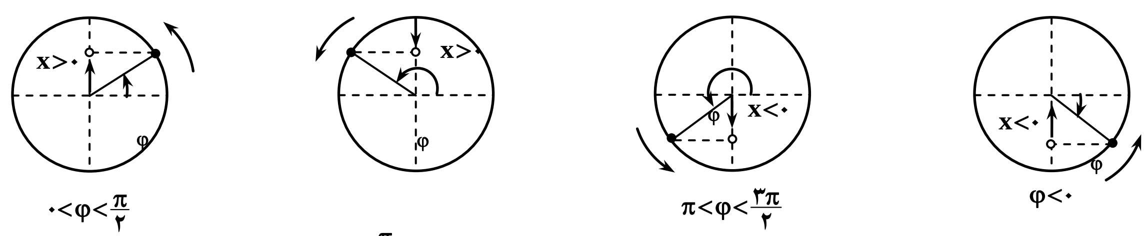
حرکت هماهنگ ساده همان تصویر حرکت دورانی یکنواخت بر روی یکی از قطرهای دایرهٔ دوران است . وقتی ذرّه‌ای بر روی دایره‌ای با سرعت ثابت دوّران می‌کند، تصویر آن بر روی قطر دایره حرکت رفت و برگشت بر روی خط راست (حرکت نوسانی) انجام می‌دهد.

مرکز دایرهٔ دوران ، مرکز حرکت نوسانی و شعاع دایرهٔ دوران ، دامنهٔ حرکت نوسانی است . فـاز در حرکت نوسانی همان زاویه‌ای است که موقعیت ذره درحرکت دورانی نسبت به افق می‌سازد .



$\sin\varphi=\frac{x}{A} \Rightarrow x=A\sin\varphi \xrightarrow{\varphi=\omega t} x=A\sin(\omega t)$

با توجه به مقدار فاز حرکت ($\varphi=\omega t$) مکان نوسانگر در هر یک از ناحیه‌های دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌شود . مشخصات مکانی نوسانگر در نواحی مثلثاتی در زیر نمایش داده شده است . در ناحیهٔ اول و دوم بُعد مثبت و در ناحیهٔ سوم و چهارم بُعد منفی است .



$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ — ناحیه اول : بُعد مثبت حرکت به سمت انتهای مسیر

$\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ — ناحیه دوم : بُعد مثبت حرکت به سمت مرکز نوسان

$\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ — ناحیه سوم : بُعد منفی حرکت به سمت انتهای مسیر

$\varphi<0$ — ناحیه چهارم : بُعد منفی حرکت به سمت مرکز نوسان

در مرکز نوسان بُعد حرکت صفر است .

$$x=A\sin(\omega t)\xrightarrow{x=0}A\sin(\omega t)=0\Rightarrow \omega t=\frac{2\pi}{T}t=n\pi\Rightarrow t=\frac{nT}{2}\quad,\quad n=1,2,...$$

زمان مضربی از نصف دوره باشد ، نوسانگر در مرکز نوسان است .

در انتهای مسیر بُعد ماکزیمم است .

$$x=A\sin(\omega t)\xrightarrow{x=\pm A}A\sin(\omega t)=\pm A\Rightarrow \omega t=\frac{2\pi}{T}t=(2n-1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=(2n-1)\frac{T}{4}\quad,\quad n=1,2,3,...$$

زمان مضرب فردی از ربع دوره باشد ، نوسانگر در انتهای مسیر است .

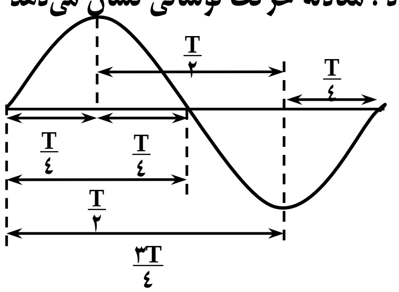
در مرکز نوسان علامت بعد عوض می‌شود ، در حرکت به سمت انتهای مسیر بعد افزایش یافته و در حرکت به سمت مرکز نوسان بعد کاهش می‌یابد.

مسافت طی شده در هر دوره $4A$ و مسافت طی شده در نیم دوره $2A$ می‌باشد .

جابه‌جایی نوسانگر در هر دوره برابر صفر بوده و جابه‌جایی در نیم دوره به نقطهٔ شروع نوسان بستگی دارد .

نمودار مکان-زمان حرکت نوسانی ساده

نوسانگر با شروع حرکت از مرکز نوسان ، بعد از عبور از نواحی مثلثاتی مجدداً به نقطهٔ شروع برمی‌گردد . معادلهٔ حرکت نوسانی نشان می‌دهد که نمودار مکان– زمان نوسانگر یک تابع سینوسی می‌باشد .



معادلهٔ سرعت حرکت نوسانی

اگر از معادلهٔ مکان بر حسب زمان مشتق بگیریم ، معادلهٔ سرعت به دست می‌آید .

$$v=\frac{dx}{dt}\xrightarrow{x=A\sin(\omega t+\theta_0)}v=A\omega\cos(\omega t)$$

در انتهای مسیر حرکت ، سرعت نوسانگر صفر است .

$$v=0\Rightarrow \cos(\omega t)=0\Rightarrow \omega t=\frac{2\pi}{T}t=(2n-1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=(2n-1)\frac{T}{4}\quad,\quad n=1,2,3,4,...$$

زمان مضرب فردی از ربع دوره باشد ، سرعت نوسانگر صفر است .

در مرکز نوسان سرعت نوسانگر ماکزیمم است .

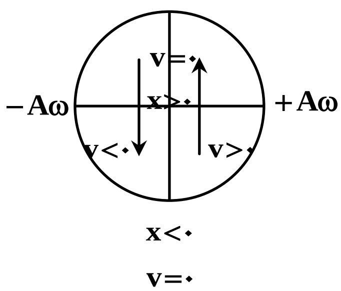
$$v_m=\pm A\omega\Rightarrow \cos(\omega t)=\pm 1\Rightarrow \omega t=\frac{2\pi}{T}t=n\pi\Rightarrow t=n\frac{T}{2}\quad,\quad n=1,2,3,4,...$$

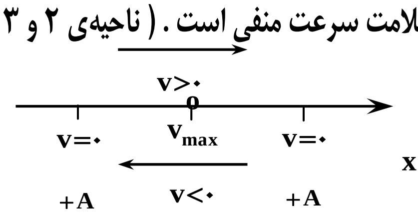
زمان مضربی از نصف دوره باشد ، سرعت نوسانگر ماکزیمم است .

در انتهای مسیر علامت سرعت عوض می‌شود ، در حرکت به سمت انتهای مسیر سرعت کاهش یافته و در حرکت به سمت مرکز نوسان سرعت افزایش می‌یابد.

وقتی نوسانگر به طرف بالا حرکت می‌کند ، علامت سرعت مثبت است . (ناحیه‌ی ٤ و ١)

وقتی نوسانگر به طرف پائین حرکت می‌کند ، علامت سرعت منفی است . (ناحیه‌ی ٢ و ٣)



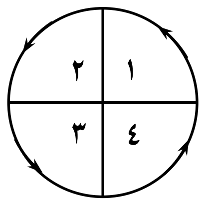


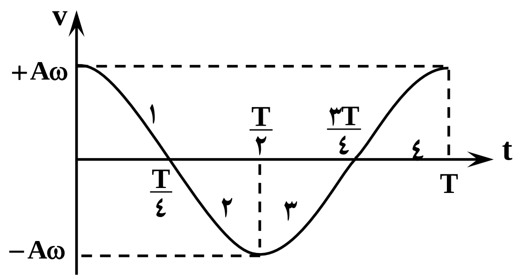
سرعت نوسانگر در بُعد x برابر است با :

$$\left.\begin{array}{l} x=A\sin(\omega t) \Rightarrow \sin(\omega t)=\frac{x}{A} \\ v=A\omega\cos(\omega t) \Rightarrow \cos(\omega t)=\frac{v}{A\omega} \end{array}\right\} \xrightarrow{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} (\frac{x}{A})^2+(\frac{v}{A\omega})^2=1 \Rightarrow v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

نسبت سرعت نوسانگر به بیشینه سرعت در هر لحظه برابر است با : $\frac{v}{v_m}=\sqrt{1-(\frac{x}{A})^2}=\cos(\omega t)$

حرکت از مرکز نوسان یعنی جایی که سرعت بیشینه است ، شروع می‌شود . نوسانگر پس از طی نواحی مثلثاتی به نقطهٔ شروع برمی‌گردد . در ناحیه ۲ و ۳ سرعت در خلاف جهت محور یعنی منفی و در ناحیهٔ ٤ و ۱ حرکت در جهت محور یعنی مثبت می‌باشد .





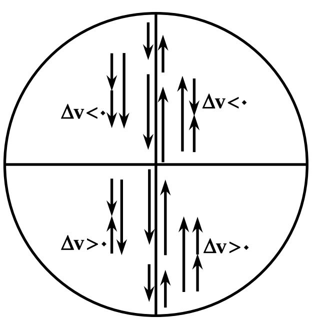
معادله‌ی شتاب نوسانگر ساده

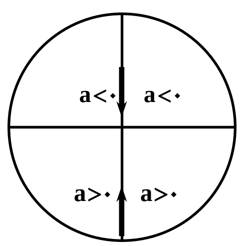
اگر از معادلهٔ سرعت مشتق بگیریم ، معادلهٔ شتاب بدست می‌آید .

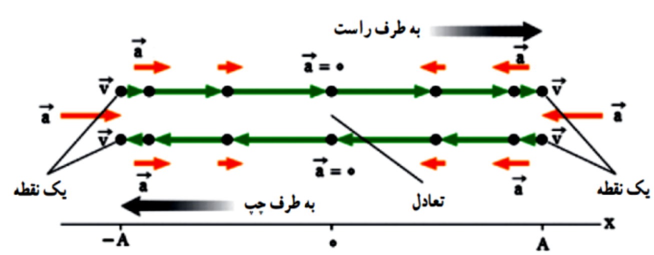
$a=\frac{dv}{dt} \xrightarrow{v=A\omega\cos(\omega t)} a=-A\omega^2\sin(\omega t)$ (حرکت نوسانی ،شتاب‌دار متغیر است .)

مشتق یک تابع شیب خط مماس بر آن است ، پس شتاب برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت زمان است . شتاب هم علامت با شیب نمودار سرعت– زمان است .

شتاب در جهت تغییر سرعت است ، در ناحیهٔ ۱ و ۲ تغییر سرعت منفی و در ناحیهٔ ۳ و ٤ تغییر سرعت مثبت است .







در مرکز نوسان شتاب صفر است .

$$a=0 \xrightarrow{a=-A\omega^2\sin(\omega t)} \sin(\omega t)=0 \Rightarrow \omega t=\frac{2\pi}{T}t=n\pi \Rightarrow t=n\frac{T}{2} \quad , \quad n=0,1,2,3,......$$

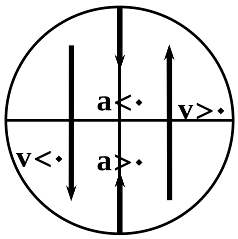
زمان مضربی از نصف دوره باشد ، شتاب صفر است .

در انتهای مسیر حرکت نوسانی شتاب بیشینه است .

$$a=\mp A\omega^2 \xrightarrow{a=-A\omega^2\sin(\omega t)} \sin(\omega t)=\pm1 \Rightarrow \omega t=\frac{2\pi}{T}t=(2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow t-(2n-1)\frac{T}{4} \quad , \quad n=1,2,3,......$$

زمان مضرب فردی از ربع دوره باشد ، شتاب بیشینه است .

در حرکت نوسانی ساده شتاب در مرکز نوسان صفر و در انتهای مسیر بیشینه است. علامت شتاب در مرکز نوسان عوض می‌شود. پس با صفر شدن مکان، جهت شتاب عوض می‌شود. حرکت به سمت مرکز نوسان یعنی کاهش شتاب و حرکت به سمت انتهای مسیر یعنی افزایش شتاب.



هنگامی که نوسانگر به سمت مرکز نوسان می‌رود ، یعنی ناحیهٔ دوم (سرعت و شتاب هر دو منفی) و ناحیهٔ چهارم (سرعت و شتاب هر دو مثبت) حرکت تند شونده و هنگامی که نوسانگر به سمت انتهای مسیر می‌رود ، یعنی ناحیهٔ اول (سرعت مثبت و شتاب منفی) و ناحیهٔ سوم (سرعت منفی و شتاب مثبت) حرکت کند شونده است .

فاز حرکت (ωt) از روی معادلهٔ شتاب به صورت زیر به دست می‌آید :

$$a=-A\omega^2\sin(\omega t)\xrightarrow{a_m=A\omega^2}\sin(\omega t)=-\frac{a}{a_m}$$

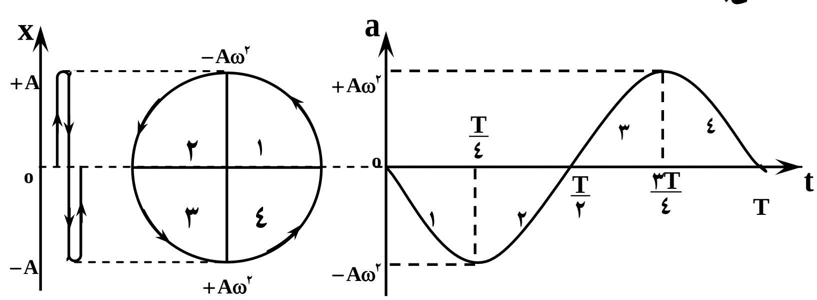
بیشینه شتاب

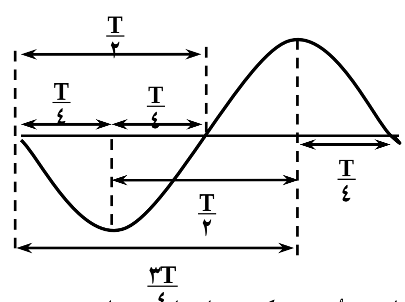
روابط بیشینه شتاب به صورت زیر معرفی می‌شود :

$$a_m=A\omega^2\ \Rightarrow\ \begin{cases} a=(A\omega)\omega\xrightarrow{v_m=A\omega}a=\omega v_m\xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{k}{m}}\,v_m \\ a=\frac{(A\omega)^2}{A}\xrightarrow{v_m=A\omega}a=\frac{v_m^2}{A}\xrightarrow{v_m=A\omega=A\sqrt{\frac{k}{m}}}\Rightarrow a=A\frac{k}{m} \end{cases}$$

نمودار شتاب- زمان حرکت نوسانی ساده

نوسانگر با شروع حرکت از مرکز نوسان ، بعد از عبور از نواحی مثلثاتی مجدداً به نقطه‌ی شروع برمی‌گردد . معادلهٔ شتاب در حرکت نوسانی نشان می‌دهد که نمودار شتاب- زمان نوسانگر یک تابع $-\sin\theta$ می‌باشد .



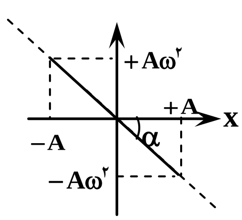


رابطهٔ بین شتاب و بُعد حرکت برابر است با :

$$a=-A\omega^2\sin(\omega t)\xrightarrow{x=A\sin(\omega t)}a=-\omega^2 x$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که علامت شتاب و بُعد حرکت مخالف یک‌دیگرند .

قدر مطلق شیب نمودار شتاب بر حسب بُعد برابر مجذور بسامد زاویه‌ای است .



$$\underbrace{|\tan\alpha|}_{\text{شیب نمودار}}=\frac{a}{x}=\omega^2=\frac{k}{m}$$

رابطهٔ بین سرعت و شتاب نوسانگر به صورت زیر به دست می‌آید :

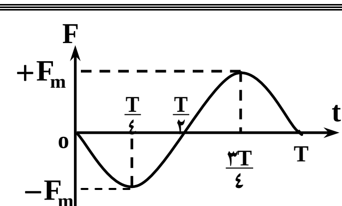
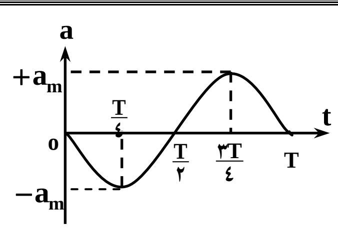
$$\left.\begin{array}{l} v=A\omega\cos(\omega t)\ \Rightarrow\ \cos(\omega t)=\frac{v}{A\omega} \\ a=-A\omega^2\sin(\omega t)\ \Rightarrow\ \sin(\omega t)=\frac{a}{-A\omega^2} \end{array}\right\}\xrightarrow{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}\left(\frac{v}{A\omega}\right)^2+\left(\frac{a}{A\omega^2}\right)^2=1\ \Rightarrow\ a=\pm\omega\sqrt{v_m^2-v^2}$$

نسبت شتاب به شتاب ماکزیمم در هر لحظه و در هر مکان برابر است با : $\frac{a}{a_m}=\sqrt{۱-(\frac{v}{v_m})^۲}=-\frac{x}{A}=-\sin(\omega t)$

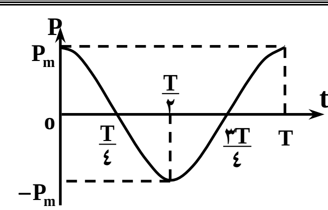
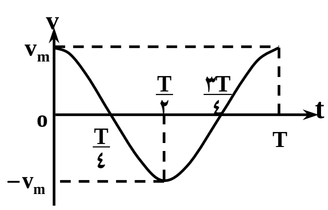
نیروی وارد بر نوسانگر

طبق قانون دوم نیوتن ، برآیند نیروهای وارد بر جسم برابر حاصل ضرب جرم جسم در شتاب است . به عبارت دیگر شتاب یک جسم در همان جهت نیروی وارد بر آن جسم بوده و برابر نیروی برآیند تقسیم بر جرم جسم است . $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F}=m\vec{a}$

تصویر حرکت دورانی یکنواخت روی قطر دایره‌ی دوران ، حرکت نوسانی ساده است . پس شتاب و نیروی وارد بر نوسانگر تصویر شتاب و نیروی مرکزگرای وارد بر جسمی است که در حال دوران است . نیروی جانب به مرکز در حرکت دایره‌ای یکنواخت ، مقدار ثابتی است ، ولی تصویر آن روی قطر دایره ثابت نبوده و در مرکز نوسان صفر و در انتهای مسیر بیشینه است . در حرکت به سمت مرکز نوسان نیرو کاهش یافته تا در مرکز نوسان جهت آن عوض شود .

نیرو	$F=ma$	شتاب
در مرکز نوسان $t=n\frac{T}{۲} \Rightarrow F=۰$	$\Rightarrow$	در مرکز نوسان $t=n\frac{T}{۲} \Rightarrow a=۰$
در انتهای مسیر $t=(۲n-۱)\frac{T}{٤} \Rightarrow F_m=mA\omega^۲$	$\Rightarrow$	در انتهای مسیر $t=(۲n-۱)\frac{T}{٤} \Rightarrow a_m=A\omega^۲$
در ناحیهٔ اول و دوم $F<۰$	$\Rightarrow$	در ناحیهٔ اول و دوم $a<۰$
در ناحیهٔ سوم و چهارم $F>۰$	$\Rightarrow$	در ناحیهٔ سوم و چهارم $a>۰$
$F=-mA\omega^۲\sin(\omega t)$	$\Rightarrow$	$a=-A\omega^۲\sin(\omega t)$
$F=-m\omega^۲x \Rightarrow \frac{F}{x}=-m\omega^۲$	$\Rightarrow$	$a=-\omega^۲x \Rightarrow \frac{a}{x}=-\omega^۲$
$\sin\varphi=-\frac{F}{F_m}=-\frac{a}{a_m}=+\frac{x}{A}$	$\Rightarrow$	$\sin\varphi=-\frac{a}{a_m}=+\frac{x}{A}$
$F=\mp m\omega\sqrt{v^۲_m-v^۲}$	$\Rightarrow$	$a=\mp\omega\sqrt{v^۲_m-v^۲}$
$\frac{F}{F_m}=\frac{a}{a_m}=\sqrt{۱-(\frac{v}{v_m})^۲}$	$\Rightarrow$	$\frac{a}{a_m}=\sqrt{۱-(\frac{v}{v_m})^۲}$
جهت نیرو در مرکز نوسان عوض می‌شود .	$\Rightarrow$	جهت شتاب در مرکز نوسان عوض می‌شود .
	$\Rightarrow$	

تکانه حاصل ضرب جرم در سرعت است ، اگر تمام روابطی که برای سرعت نوسانگر بیان شده است را در جرم ضرب کنیم ، روابط مربوط به تکانه حاصل می‌شود . آهنگ تغییرات تکانه نوسانگر برابر نیروی وارد بر نوسانگر است .

تکانه	$P=mv$	سرعت
در مرکز نوسان $t=n\frac{T}{۲} \Rightarrow P_m=mA\omega$	$\Rightarrow$	در مرکز نوسان $t=n\frac{T}{۲} \Rightarrow v_m=A\omega$
در انتهای مسیر $t=(۲n-۱)\frac{T}{٤} \Rightarrow P=۰$	$\Rightarrow$	در انتهای مسیر $t=(۲n-۱)\frac{T}{٤} \Rightarrow v=۰$
در ناحیهٔ اول و چهارم $P>۰$	$\Rightarrow$	در ناحیهٔ اول و چهارم $v>۰$
در ناحیهٔ دوم و سوم $P<۰$	$\Rightarrow$	در ناحیهٔ دوم و سوم $v<۰$
$P=mA\omega\cos(\omega t)$	$\Rightarrow$	$v=A\omega\cos(\omega t)$
$P=\pm m\omega\sqrt{A^۲-x^۲}$	$\Rightarrow$	$v=\pm\omega\sqrt{A^۲-x^۲}$
$\cos\varphi=\frac{P}{P_m}=\frac{v}{v_m}=\sqrt{۱-(\frac{x}{A})^۲}$	$\Rightarrow$	$\cos\varphi=\frac{v}{v_m}=\sqrt{۱-(\frac{x}{A})^۲}$
جهت تکانه در انتهای مسیر عوض می‌شود .	$\Rightarrow$	جهت سرعت در انتهای مسیر عوض می‌شود .
	$\Rightarrow$	

در هر دوره ، نوسانگر دو مرتبه از مرکز نوسان و دو مرتبه از انتهای مسیر می‌گذرد . پس در هر دوره ، بُعد ، سرعت ، شتاب ، نیرو و تکانه دو مرتبه صفر و دو مرتبه بیشینه می‌شوند و در هر نیم دوره ، یک مرتبه صفر و یک مرتبه بیشینه می‌شوند.

اختلاف فاز بین کمیت‌های مربوط به حرکت نوسانی مطابق جدول زیر است .

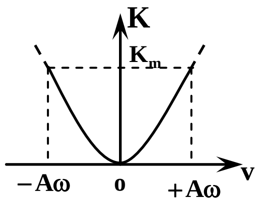
	v	a	F	P
x	$\frac{\pi}{۲}$	π	π	$\frac{\pi}{۲}$
v	–	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{\pi}{۲}$	صفر
a	$\frac{\pi}{۲}$	–	صفر	$\frac{\pi}{۲}$

انرژی جنبشی نوسانگر

اگر جرم نوسانگر m و سرعت نوسانگر v باشد ، انرژی جنبشی نوسانگر برابر است با : $K=\frac{1}{2}mv^2$

این رابطه نشان می‌دهد که نمودار انرژی جنبشی نسبت به سرعت یک سهمی ($K\propto v^2$) است .

این سهمی تنها بین دو سرعت $\pm V_m=\pm A\omega$ رسم می‌شود .



معادلهٔ انرژی جنبشی نوسانگر ساده به صورت زیر بیان می‌شود :

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{v=A\omega\cos(\omega t)} K=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t)$$

در مرکز نوسان انرژی جنبشی ماکزیمم است .

$$K_m=\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \cos^2(\omega t)=1 \Rightarrow \omega t=\frac{2\pi}{T}t=n\pi \Rightarrow t=n\frac{T}{2} \quad , \quad n=1,2,3,4,...$$

در حرکت به سمت مرکز نوسان انرژی جنبشی افزایش می‌یابد .

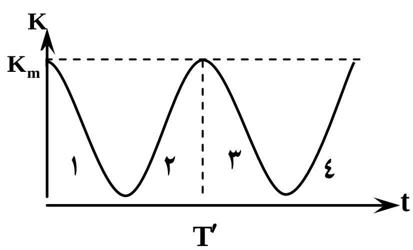
در انتهای مسیر انرژی جنبشی صفر است .

$$K=0 \Rightarrow \cos^2(\omega t)=0 \Rightarrow \omega t=\frac{2\pi}{T}t=(2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=(2n-1)\frac{T}{4} \quad , \quad n=1,2,3,4,...$$

در حرکت به سمت انتهای مسیر انرژی جنبشی کاهش می‌یابد .

نمودار انرژی جنبشی بر حسب زمان به صورت روبرو رسم می‌شود :

دورهٔ تناوب $\cos^2\alpha$ نصف دورهٔ تناوب $\cos\alpha$ است . $T'=\frac{T}{2}$



$$K=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) \xrightarrow{K_m=\frac{1}{2}mA^2\omega^2} K=K_m\cos^2(\omega t) \quad , \quad \cos^2(\omega t)=\frac{K}{K_m}$$

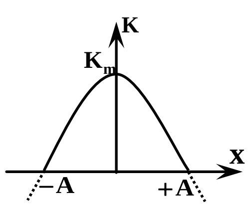
نسبت انرژی جنبشی به بیشینه‌ی آن برابر است با :

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{K}{K_m}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv_m^2} \Rightarrow \frac{K}{K_m}=\cos^2(\omega t)=(\frac{v}{v_m})^2$$

در بُعد x انرژی جنبشی نوسانگر برابر است با :

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}} K=\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2)$$

چون $K\propto -x^2$ است ، نمودار انرژی جنبشی بر حسب بُعد یک سهمی بوده که دارای ماکزیمم است .



$$\frac{K}{K_m}=(\frac{v}{v_m})^2=1-(\frac{x}{A})^2=1-(\frac{a}{a_m})^2=1-(\frac{F}{F_m})^2=\cos^2(\omega t)$$

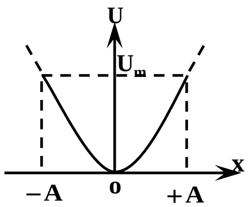
در فصل دوم روابط بین انرژی جنبشی و تکانه معرفی شده است . این روابط برای نوسانگر ساده نیز صادق است .

$$K=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t) \xrightarrow[P=mA\omega\cos(\omega t)]{v=A\omega\cos(\omega t)} K=\frac{P^2}{2m}=\frac{1}{2}Pv$$

انرژی پتانسیل نوسانگر

در نوسان وزنه- فنر انرژی پتانسیل نوسانگر همان انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر است . اگر در فنری تغییر طول ایجاد شود ، انرژی ذخیره شده در فنر در اثر این تغییر طول برابر است با :

$$U=\frac{1}{2}kx^2 \xrightarrow{k=m\omega^2} U=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$



این رابطه نشان می‌دهد که نمودار انرژی پتانسیل نسبت به بُعد یک سهمی ($U\propto x^2$) است .

این سهمی تنها بین دو بُعد $\pm x_m=\pm A$ رسم می‌شود .

در مرکز نوسان بُعد صفر است ، پس انرژی پتانسیل نیز در مرکز نوسان صفر است .

$$U=0 \Rightarrow \sin^2(\omega t)=0 \Rightarrow \omega t=\frac{2\pi}{T}t=n\pi \Rightarrow t=n\frac{T}{2} \quad , \quad n=0,1,2,3,4,...$$

در حرکت به سمت مرکز نوسان انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد .

در انتهای مسیر انرژی پتانسیل ماکزیمم است .

$$U_m=\frac{1}{2}kx_m^2=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \Rightarrow \sin^2(\omega t)=1 \Rightarrow \omega t=\frac{2\pi}{T}t=(2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=(2n-1)\frac{T}{4} \quad , \quad n=1,2,3,4,...$$

در حرکت به سمت انتهای مسیر انرژی پتانسیل افزایش می‌یابد .

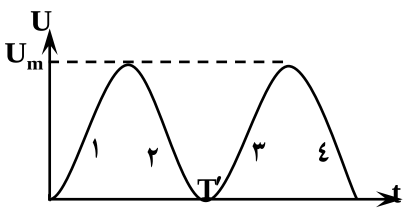
بیشینه انرژی جنبشی هم اندازهٔ بیشینه انرژی پتانسیل است . $K_m=U_m$

انرژی پتانسیل در دو بُعد متفاوت برابر است با :

$$U=\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1}=\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$$

معادلهٔ انرژی پتانسیل نوسانگر ساده به صورت زیر بیان می‌شود :

$$U=\frac{1}{2}kx^2 \xrightarrow{x=A\sin(\omega t)} U=\underbrace{\frac{1}{2}kA^2}_{U_m}\sin^2(\omega t) \xrightarrow{k=m\omega^2} U=\underbrace{\frac{1}{2}mA^2\omega^2}_{U_m}\sin^2(\omega t) \Rightarrow U=U_m\sin^2(\omega t)$$



نمودار انرژی جنبشی بر حسب زمان $U\propto\sin^2\omega t$ ، به صورت روبه‌رو رسم می‌شود :

دورهٔ تناوب $\sin^2\omega t$ نصف دورهٔ تناوب $\sin\omega t$ است . $T'=\frac{T}{2}$

با توجه به رابطهٔ $U=U_m\sin^2\omega t$ می‌توان نوشت :

$$\sin^2(\omega t)=\frac{U}{U_m}=\left(\frac{x}{A}\right)^2=\left(\frac{a}{a_m}\right)^2=\left(\frac{F}{F_m}\right)^2=1-\left(\frac{v}{v_m}\right)^2$$

نسبت انرژی جنبشی و پتانسیل

از مقایسه انرژی جنبشی و پتانسیل روابط زیر حاصل می‌شود :

$$\left.\begin{aligned}K&=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t)\\U&=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{K}{U}=\frac{\cos^2\omega t}{\sin^2\omega t} \Rightarrow \frac{K}{U}=\cot^2(\omega t)$$

$$\left.\begin{aligned}K&=\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2)\\U&=\frac{1}{2}m\omega^2x^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{K}{U}=\frac{A^2-x^2}{x^2} \Rightarrow \frac{K}{U}=\left(\frac{A}{x}\right)^2-1$$

نمودار انرژی جنبشی و پتانسیل نسبت به بُعد به صورت زیر رسم می‌شود :

در مورد نقاطی که دو نمودار یک‌دیگر را قطع کرده‌اند (نقاطی که انرژی جنبشی و پتانسیل برابر شده‌اند) می‌توان گفت :

۱- بُعد حرکت $\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ است .
$$\frac{K}{U}=(\frac{A}{x})^{۲}-۱=۱ \;\Rightarrow\; (\frac{A}{x})^{۲}=۲ \;\Rightarrow\; \frac{x}{A}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲- فاز حرکت مضرب فردی از $\frac{\pi}{٤}$ است .
$$\frac{K}{U}=\cot^{۲}(\omega t)=۱ \;\Rightarrow\; \cot(\omega t)=\pm۱ \xrightarrow{\omega t=(۲n-۱)\frac{\pi}{٤}} \omega t=\underbrace{\frac{\pi}{٤}}_{\text{ناحیه اول}},\underbrace{\frac{۳\pi}{٤}}_{\text{ناحیه دوم}},\underbrace{\frac{٥\pi}{٤}}_{\text{ناحیه سوم}},\underbrace{\frac{۷\pi}{٤}}_{\text{ناحیه چهارم}}$$

۳- زمان مضرب فردی از $\frac{T}{۸}$ است .
$$\frac{K}{U}=\cot^{۲}(\omega t)=۱ \;\Rightarrow\; \cot(\omega t)=\pm۱ \;\Rightarrow\; \frac{۲\pi}{T}t=(۲n-۱)\frac{\pi}{٤} \;\Rightarrow\; t=(۲n-۱)\frac{T}{۸}$$

انرژی مکانیکی

در غیاب نیروهای ناپایستار ، مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل(انرژی مکانیکی) یک جسم همواره مقدار ثابتی است . یعنی با افزایش یکی، دیگری چنان کاهش می‌یابد که مجموع آنها ثابت بماند . در مرکز نوسان انرژی جنبشی بیشینه و در انتهای مسیر انرژی پتانسیل بیشینه است ، در حرکت به سمت مرکز نوسان با کاهش انرژی پتانسیل ، انرژی جنبشی افزایش یافته و در حرکت به سمت انتهای مسیر با کاهش انرژی جنبشی ، انرژی پتانسیل افزایش می‌یابد . این تغییرات به گونه‌ای است که در هر لحظه و در هر مکان ، انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند .

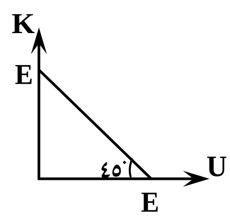
انرژی مکانیکی برابر انرژی جنبشی ماکزیمم و انرژی پتانسیل ماکزیمم است . $E=K_m=U_m$

$$\left.\begin{array}{l}K=\frac{۱}{۲}mA^{۲}\omega^{۲}\cos^{۲}(\omega t)\\ U=\frac{۱}{۲}mA^{۲}\omega^{۲}\sin^{۲}(\omega t)\end{array}\right\} \xrightarrow{K_m=U_m=\frac{۱}{۲}mA^{۲}\omega^{۲}} E=K+U=K_m=U_m=\frac{۱}{۲}mA^{۲}\omega^{۲}=\frac{۱}{۲}kA^{۲}=\frac{۱}{۲}mv_m^{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}K=\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}(A^{۲}-x^{۲})\\ U=\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}x^{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow E=K+U=\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}\Big((A^{۲}-x^{۲})+x^{۲}\Big)=\frac{۱}{۲}mA^{۲}\omega^{۲}=\frac{۱}{۲}mv_m^{۲}=\frac{۱}{۲}kA^{۲}$$

دیدیم که در هر لحظه و در هر مکان مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل مقدار ثابتی می‌باشد . نمودار انرژی جنبشی نسبت به انرژی پتانسیل به صورت زیر رسم می‌شود :

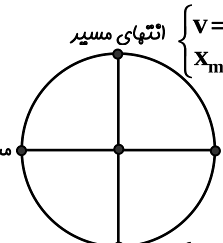
$$\left.\begin{array}{l}E=K+U \;\Rightarrow\; K=\overset{\text{ثابت}}{E}-U\\ E=K+U \begin{array}{l}\xrightarrow{U=۰} E=K_m\\ \xrightarrow{K=۰} E=U_m\end{array}\end{array}\right\} \Rightarrow$$



$$K=K_m\cos^{۲}(\omega t) \xrightarrow{K_m=E} \frac{K}{E=K_m}=\cos^{۲}(\omega t)=(\frac{v}{v_m})^{۲}=۱-(\frac{x}{A})^{۲} \xrightarrow{(\frac{x}{A})^{۲}=\frac{U}{U_m}} \frac{K}{E}=۱-\frac{U}{U_m}$$

$$U=U_m\sin^{۲}(\omega t) \xrightarrow{U_m=E} \frac{U}{E=U_m}=\sin^{۲}(\omega t)=(\frac{x}{A})^{۲}=۱-(\frac{v}{v_m})^{۲} \xrightarrow{(\frac{v}{v_m})^{۲}=\frac{K}{K_m}} \frac{U}{E}=۱-\frac{K}{K_m}$$

انتهای مسیر $\left\{\begin{array}{l}v=۰\ ,\ P=۰\ ,\ K=۰\\ x_m\ ,\ a_m\ ,\ F_m\ ,\ U_m\end{array}\right.$

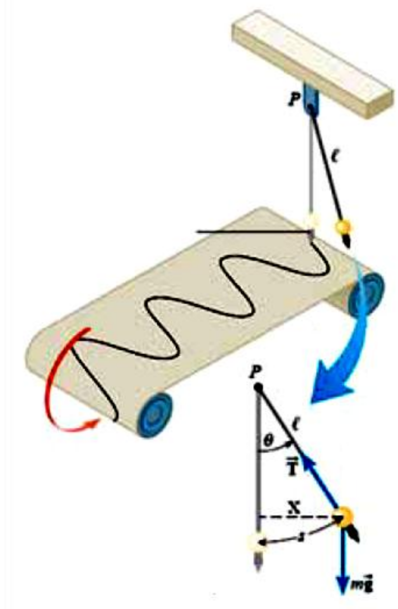


$\left.\begin{array}{l}x=۰,a=۰,F=۰,U=۰\\ v_m\ ,\ P_m\ ,\ K_m\end{array}\right\}$ مرکز نوسان

مرکز نوسان $\left\{\begin{array}{l}x=۰\ ,\ a=۰\ ,\ F=۰\ ,\ U=۰\\ v_m\ ,\ P_m\ ,\ K_m\end{array}\right.$

انتهای مسیر $\left\{\begin{array}{l}v=۰\ ,\ P=۰\ ,\ K=۰\\ x_m\ ,\ a_m\ ,\ F_m\ ,\ U_m\end{array}\right.$

آونگ ساده

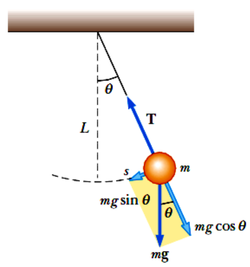


آونگ ساده وزنهٔ کوچکی به جرم m است که توسط نخ سبکی از یک نقطه آویزان است . در حالت تعادل ، آونگ در امتداد قائم قرار دارد . اگر وزنهٔ آونگ را کمی از وضع تعادل خارج کرده ($\theta \le ٦^\circ$) و رها کنیم ، آونگ حول وضع تعادلش نوسان می‌کند . نیروی برگرداننده در آونگ ساده مؤلفهٔ مماس بر مسیر نیروی وزن گلولهٔ آونگ است . اگر زاویهٔ انحراف به اندازهٔ کافی کوچک باشد ، مسیر حرکت تقریباً شاره خط افقی می‌باشد (یعنی دامنهٔ نوسان بسیار کوچک است) . در نوسان آونگ ساده از اصطکاک و جرم نخ صرف‌نظر شده بر گلوله نیروی وزن $m\vec{g}$ و نیروی کشش نخ $\vec{T}$ وارد می‌شود .

نیروی کشش نخ بر مسیر حرکت عمود بوده و با یکی از مؤلفه‌های وزن خنثی می‌شود .

$$T=mg\cos\theta$$

نیروی برگرداننده مؤلفهٔ نیروی وزن در امتداد مماس بر مسیر می‌باشد. این نیرو می‌خواهد آونگ را به حالت تعادل برگرداند . اگر زاویه‌ی θ کوچک باشد : (l طول آونگ است .)



$$\sin\theta \approx \theta = \frac{x}{l}$$

نیروی برگرداننده برابر است با :

$$F=mg\sin\theta \approx mg\theta = mg\frac{x}{l}$$

مؤلفهٔ نیروی وزن در راستای مماس بر مسیر همواره در خلاف جهت بردار مکان است .

$$F=-mg\frac{x}{l}$$

نیروی برگرداننده از قانون هوک پیروی می‌کند :

$$F=ma \Rightarrow -mg\frac{x}{l}=ma \Rightarrow a=-\frac{g}{l}x \xrightarrow{a=-\omega^٢x} \omega^٢=\frac{g}{l} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}=\frac{٢\pi}{T} \Rightarrow T=٢\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

دورهٔ تناوب حرکت آونگ ساده به طول و شتاب گرانشی بستگی دارد ولی به جرم گلوله‌ی آونگ ، دامنه ، زاویهٔ انحراف از وضع تعادل به شرط آن که $\theta \le ٦^\circ$ باشد و فاز حرکت نوسانی بستگی ندارد .

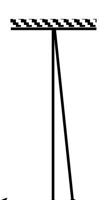
با تغییر محل آونگ شتاب گرانشی نیز تغییر می‌کند .

$$\left.\begin{array}{l} T \propto \sqrt{l} \\ T \propto \frac{١}{\sqrt{g}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_٢}{T_١}=\sqrt{\frac{l_٢}{l_١}\times\frac{g_١}{g_٢}}$$

اگر دو آونگ با دوره‌ی $T_١$ و $T_٢$ از یک وضعیت با هم رها شوند و پس از گذشت زمان t اختلاف تعداد نوسان دو آونگ برابر n شـود، مـی‌تـوان نوشت : (t زمان انطباق n ام)

$$n=N_١-N_٢ \xrightarrow{T=\frac{t}{N}} n=\frac{t}{T_١}-\frac{t}{T_٢} \Rightarrow t=\frac{nT_١T_٢}{|T_٢-T_١|}$$

اگر زاویهٔ انحراف آونگ از وضع تعادل $\theta \le ٦^\circ$ باشد ، نوسانات کم دامنه بوده و حرکت نوسانی ساده است . پس تمام روابط بیان شده در این فصل برای آونگ ساده به عنوان یک نوسانگر ساده صادق است .



v_m , K_m , P_m , $x=a=F=U=٠$ $\Leftarrow$ مرکز نوسان — انتهای مسیر $\Rightarrow$ x_m , a_m , F_m , U_m , $v=K=P=٠$

اگر شتاب گرانشی در سطح زمین برابر $g=\frac{Gm_e}{R_e^2}$ باشد ، شتاب گرانشی در نقطه‌ای که در ارتفاع h از سطح زمین قرار دارد برابر است با :

$$g'=\frac{Gm_e}{(R_e+h)^2} \Rightarrow \frac{g'}{g}=\left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2 \xrightarrow{T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{g}{g'}}} \frac{T'}{T}=\frac{R_e+h}{R_e}$$

اگر آونگ ساده را از سطح کره‌ی زمین به سطح کره‌ای به جرم m_x و شعاع R_x ببریم ، دوره‌ی آونگ به صورت زیر تغییر می‌کند :

$$g_x=\frac{Gm_x}{R_x^2} \xrightarrow{g_e=\frac{Gm_e}{R_e^2}} \frac{g_x}{g_e}=\frac{m_x}{m_e}\times\left(\frac{R_e}{R_x}\right)^2 \Rightarrow \frac{T_x}{T_e}=\sqrt{\frac{g_e}{g_x}}=\frac{R_x}{R_e}\times\sqrt{\frac{m_e}{m_x}}$$

اگر برگلولۀ آونگ ساده‌ای نیروی F در راستای قائم رو به پایین وارد شود ، یا آونگ درون آسانسوری که با شتاب a تند شونده بالا رفته و یا کند شونده پایین می‌آید قرار گیرد ، یا آهن ربایی در زیر آونگ با گلولۀ آهنی قرار گیرد ، دورۀ آونگ از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$F=ma \Rightarrow a=\frac{F}{m} \quad , \quad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$$

اگر برگلولۀ آونگ ساده‌ای نیروی F در راستای قائم رو به بالا وارد شود ، یا آونگ درون آسانسوری که با شتاب a کند شونده بالا رفته و یا تند شونده پایین می‌آید قرار گیرد ، یا آهن ربایی در بالای آونگ با گلولۀ آهنی قرار گیرد ، دورۀ آونگ از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$F=ma \Rightarrow a=\frac{F}{m} \quad , \quad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$$

در بخش قبل دیدم که وقتی یک نوسانگر ساده نظیر آونگ و یا دستگاه وزنه- فنر را از وضع تعادل منحرف می‌کنیم و آن را برای نوسان آزاد می‌گذاریم ، دستگاه حول وضع تعادل خود شروع به نوسان می‌کند . این حرکت نوسانی ، نوسان طبیعی یا آزاد دستگاه نامیده می‌شود . بسامد (یا دوره) نوسان طبیعی از ویژگی‌های ساختاری نوسانگر است . مثلاً : بسامد آونگ ساده کم دامنه به طول آونگ بستگی دارد . یعنی، اگر با دادن انرژی به یک آونگ ، دامنه نوسان آن را افزایش دهیم(به طوری که زاویه انحراف آونگ کوچک باقی بماند) بسامد نوسان‌های آن تغییر نمی‌کند ، در حالی که برای تغییر بسامد ، لازم است طول آونگ را تغییر دهیم.

تا پیش از این بخش دستگاه‌های نوسانی آرمانی شده‌ای را بررسی کردیم که بدون اصطکاک بودند . همان طور که دیدیم در چنین دستگاه-هایی انرژی مکانیکی کل ثابت است، مجموعه دستگاه برای همیشه و بدون کاهش دامنه به طور پیوسته در حرکت نوسانی است . با وجود این همۀ ، دستگاه‌های واقعی همواره نیروهای اتلافی دارند و نوسان‌ها با گذشت زمان از بین می‌روند مگر این که انرژی تلف شده را جایگزین کنیم . کاهش دامنه نوسان به دلیل نیروهای اتلافی سبب میرا شدن حرکت نوسانی می‌شود ، چنین حرکتی نوسان میرا نامیده می-شود .

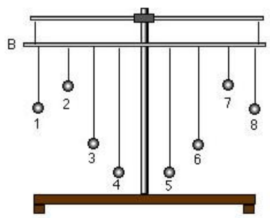
شکل روبه‌رو نمونه‌ای از یک نوسان میرا را نشان می دهد. اگر صندلی به حال خود رها شود سر انجام به علت نیروهای میرا کننده (مقاومت هوا و اصطکاک سطح) ازحرکت باز می‌ایستد.

به علت وجود اصطکاک و نیروهای مقاوم ، دامنه‌ی نوسانگر به علت از دست دادن انرژی کاهش یافته تا نوسانگر متوقف شود . در نوسان‌های میرا ، نوسانگر بسامد طبیعی خود را حفظ کرده ولی دامنه کاهش می‌یابد .

تشدید

همان طور که اشاره شد یک نوسانگر میرا اگر به حال خود رها شود ، سرانجام متوقف می‌شود . اما با وارد کردن نیرویی که نسبت به زمان به طور دوره‌ای یا چرخه‌ای و با دوره تناوب و بسامد معین تغییر می‌کند ، می‌توان نوسانی با دامنه ثابت ایجاد کرد . برای نمونه ، شخصی را که در حال تاب بازی است در نظر بگیرید . می‌توانید در هر چرخه اندکی او را به جلو هُل دهید و دامنه نوسان او را ثابت نگه دارید . این نیروی اضافی را معمولاً نیروی محرک می‌نامند.

ولی اگر بخواهیم تاب به نوسان خود ادامه دهد باید به آن نیرو وارد کنم . مثلاً : می‌توانیم ، پس از یک رفت و برگشت ، هنگامی که تاب می‌خواهد نوسان بعدی را شروع کند به آن نیرو وارد کنم . در این حالت دورهٔ وارد کردن نیرو با دورهٔ نوسان تاب برابر است . با اعمال این نیرو دامنهٔ نوسان افزایش می‌یابد و به یک مقدار بیشینه می‌رسد و از این پس حرکت نوسانی بدون کاهش دامنه ادامه می‌یابد . در این حالت نیروی اعمال شده اثر نیروهای اتلافی را خنثی می‌کند.



اگر به نوسانگری یک نیروی دوره‌ای اعمال شود ، در صورتی که بسامد نیروی اعمال شده با بسامد نوسانگر یکسان باشد ، دامنه نوسان تا مقدار بیشینه‌ای افزایش می‌یابد و از آن پس حرکت نوسانی بدون کاهش دامنه ادامه می‌یابد . در این صورت می‌گوییم پدیدهٔ تشدید رخ داده است . در حالتی هم که بسامد نیروی اعمال شده با بسامد نوسانگر برابر نیست ، انرژی به نوسانگر منتقل می‌شود .

در آزمایش روبه‌رو با به نوسان در آوردن آونگ ۱ ، انرژی به دیگر آونگ‌ها منتقل می‌شود ولی تنها آونگی به نوسان در می‌آید که بسامد آن برابر بسامد آونگ ۱ باشد ، یعنی آونگ شمارهٔ ۸ .

دوره و بسامد آونگ تنها به طول و شتاب گرانش در محل آزمایش بستگی داشته به جرم گلوله‌ی آونگ بستگی ندارد .

امواج مکانیکی

امواجی که برای انتشار به محیط مادی نیاز دارند (ویژگی اول) . مانند : صوت ، موج ایجاد شده در طناب یا فنر یا سطح آب از این نوع موج هستند .

محیط کشسان

محیطی است که وقتی در آن تغییر شکلی ایجاد شود نیروهای کشسان ایجاد شده بین اجزای محیط ، تمایل دارند محیط را به حالت اوّل خود برگردانند . بیش‌تر جامدات و مایعات و گازها محیط‌های کشسان هستند . هر گاه تغییر شکلی در یک جزء از محیط کشسانی که به حال تعادل است ، ایجاد کنیم ، به علت وجود نیروی کشسانی بین اجزای محیط ، آن تغییر شکل جزء به جزء در محیط منتقل می‌شود . تغییر شکل ایجاد شده در محیط را تَپ و انتقال تَپ در محیط را انتشار گویند .

موج سینوسی

اگر یک جزء از محیط کشسانی را که در حال تعادل است با حرکت هماهنگ ساده به نوسان درآوریم ، با نوسان آن جزء ، تپ‌های متوالی در محیط تولید و به دنبال یک‌دیگر منتشر می‌شوند . چنین موجی را *موج سینوسی* می‌نامیم . نوسانگری که می‌تواند با بسامد و دامنه‌ی ثابت نوسان کند ، *منبع موج* است .

جسمی می‌تواند منبع تولید موج باشد که

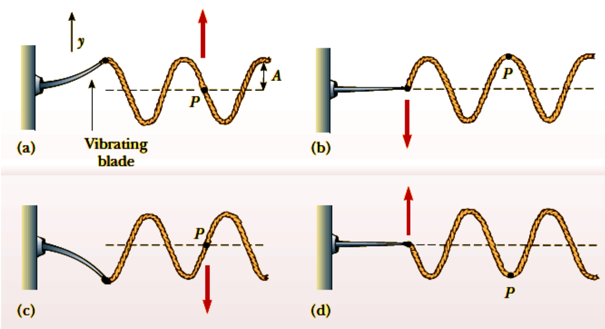
الف : اگر از وضع تعادل خارج شود ، نیروی برگرداننده‌ای ایجاد شده تا آنرا به وضع تعادل برگرداند .

ب : قابلیت تبدیل انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل و برعکس را داشته باشد .

در شکل زمینه با به نوسان در آمدن وزنهٔ متصل به فنر ، در طول طناب برآمدگی و فرورفتگی‌هایی (تَپ‌های متوالی) ایجاد شده که با انتشار در طناب در محیط پیش می‌روند . آونگ ساده نیز می‌تواند منبع تولید موج باشد . حرکت رفت و برگشت آونگ بر روی رول کاغذ نقش موج را ایجاد می‌کند .

بسامد موج

وقتی چشمه‌ی موج با بسامد f در محیط کشسان شروع به نوسان می‌کند ، ذرّات محیط مجاور خود را نیز با همان بسامد به نوسان وامی‌دارد . در شکل زیر با نوسان تیغه در طول طناب موجی با بسامدی برابر بسامد منبع موج ایجاد می‌شود .

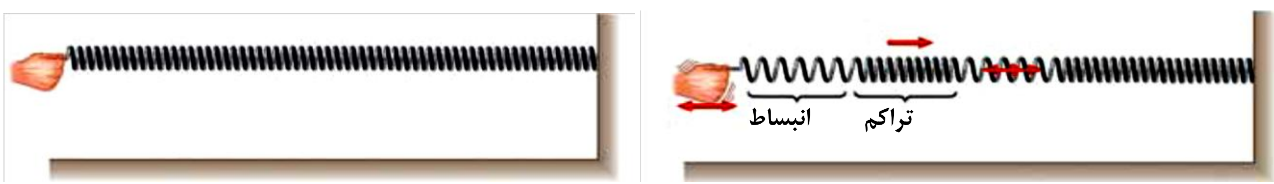


در شکل صفحه قبل تمام ذرات محیط با بسامدی برابر بسامد منبع نوسان می‌کنند ولی همراه با موج جابه‌جا نمی‌شوند (ویژگی دوم) .

در شکل روبه‌رو موج ایجاد شده در طول یک طناب در اثر ارتعاش یک نوسانگر نشان داده شده است . در این شکل A ذره‌ای از محیط و B نقطه‌ای از موج است . هنگام انتشار موج در طناب دو نوع حرکت متفاوت ، یکی حرکت نوسانی ذرات محیط و دیگری حرکت (انتشار) موج مشاهده می‌شود . در اثر انتشار موج و جابه‌جایی نقطهٔ B ذرات محیط (A) تنها با بسامد منبع موج نوسان می‌کنند . ذرات محیط در راستای y نوسان کرده و موج در راستای x منتشر می‌شود .

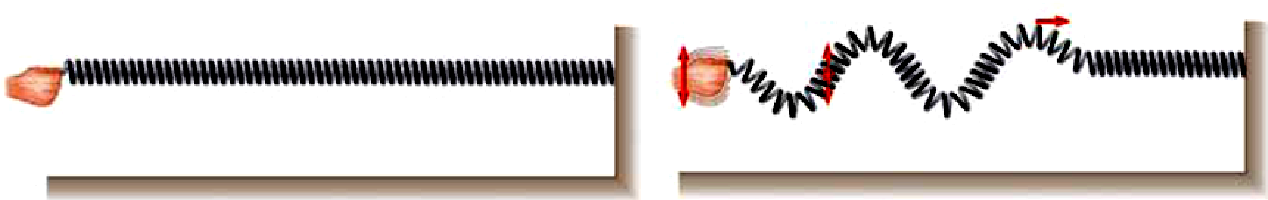
موج طولی

امواجی هستند که در آن‌ها راستای نوسان ذرّات محیط موازی با راستای انتشار موج است . امواج صوتی و امواجی که در طول یک فنر ایجاد می‌شود ، طولی هستند . امواج طولی را از انبساط و تراکم‌های متوالی آن می‌توان شناخت .



موج عرضی

امواجی هستند که راستای نوسان ذرّات محیط عمود بر راستای انتشار موج است . امواج ایجاد شده در طول طناب و در سطح آب عرضی هستند . امواج عرضی را از قلّه و درّه‌های متوالی آن می‌توان شناخت . در فنر می‌توان هم موج عرضی و هم موج طولی ایجاد نمود .

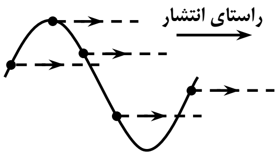


امواج عرضی تنها در جامدها و سطح مایع تولید و منتشر می‌شوند. امواج طولی در جامد و مایع و گاز تولید و منتشر می‌شود.

انتشار موج

در اثر نوسان ، ارتعاشات یا آشفتگی‌ها یا تَپ‌های متوالی علاوه بر به ارتعاش درآوردن ذرّات محیط در محیط نیز پیشروی می‌کنند . سرعت پیشروی موج در محیط را <u>سرعت انتشار</u> موج در آن محیط گویند .

سرعت انتشار موج



در انتشار موج ، شکل موج با سرعت ثابت حرکت می‌کند . تمام نقاط موج مطابق شکل روی خط راست حرکت می‌کنند .

سرعت انتشار یا جابه‌جایی موج در یک محیط ثابت است . ارتعاش و سرعت انتشار موج در یک محیط به شرایط فیزیکی محیط (دما ، جنس ، ....) بستگی داشته و به شرایط فیزیکی منبع تولید موج (بسامد ، دامنه ، فاز ، ....) بستگی ندارد . در یک محیط با شرایط فیزیکی ثابت موج با سرعت ثابت منتشر می‌شود .

سرعت امواج عرضی در یک محیط همگن یا کشسان (محیطی تمام نقاط آن دارای شرایط فیزیکی یکسان دارد) مانند تار یا طناب یکنواخت به جرم m و به طول L و نیروی کشش F از رابطهٔ روبه‌رو بدست می‌آید :

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{F_2}{F_1}\times\frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

که در اینجا $\mu=\frac{m}{L}$ جرم واحد (چگالی طولی) بر حسب کیلوگرم بر متر ، F برحسب نیوتن و v بر حسب m/s است . سرعت انتشار امواج عرضی در محیط همگن به جرم واحد طول و نیروی کشش محیط بستگی داشته و به جرم و طول بستگی ندارد .

تذکر: در یک محیط معین سرعت انتشار موج طولی از موج عرضی بیش‌تر است .

چگالی طولی یا جرم واحد طول برابر است با : $\mu=\frac{m}{L}$ چگالی حجمی یا جرم واحد حجم برابر است با : $\rho=\frac{m}{V}$ که در آن V حجم و m جـرم است . سرعت انتشار امواج عرضی در تار یا طنابی به طول L و سطح مقطع A برابر است با :

$$\mu=\frac{m}{L} \xrightarrow{m=\rho V=\rho AL} \mu=\rho A \xrightarrow{v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}} v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

در این رابطه ρ بر حسب kg/m^3 و سطح مقطع بر حسب m^2 است .

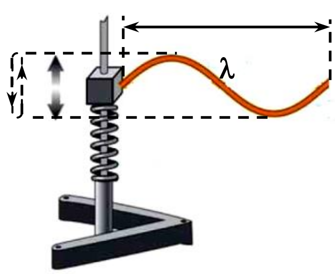
سرعت امواج عرضی در سیم یا طنابی به شعاع مقطع R یا قطر مقطع D برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}} \xrightarrow{A=\pi R^2=\frac{\pi D^2}{4}} v=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}=\frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

سرعت انتشار موج مکانیکی به شرایط فیزیکی محیط بستگی دارد . تغییر در شرایط فیزیکی منبع تاثیری در سرعت انتشار موج ندارد . با تغییر در بسامد منبع سرعت موج ثابت مانده ولی با تغییر محیط انتشار سرعت موج نیز تغییر می‌کند .

هرگاه موجی از یک محیط وارد محیط دیگر شود، چون منبع موج عوض نشده است، بسامد ثابت مانده ولی سرعت موج تغییر می‌کند.

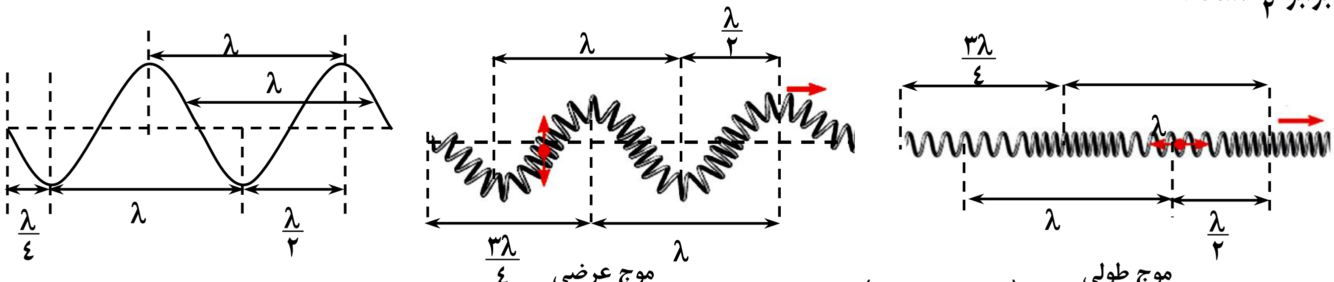
طول موج



نوسان و ارتعاش منبع باعث ایجاد موج و پیشروی آن در محیط می‌شود . با گذشت زمانی به اندازهٔ یک دوره ، منبع یک نوسان کامل انجام می‌دهد ، در این مدت جابه‌جایی موج در محیط به اندازهٔ یک طول موج می‌باشد . طول موج را با نماد لاندا (λ) نمایش می‌دهند . طول موج از جنس طول بوده و یکای آن در SI برابر متر است . شکل روبه‌رو نشان می‌دهد که در مدت یک دوره موج به اندازه‌ی λ جابه‌جا شده است .

مسافت طی شده در مدت یک دوره توسط موج را طول موج گویند.

فاصلهٔ دو قله یا دو درهٔ متوالی در موج عرضی ، فاصلهٔ دو تراکم یا دو انبساط متوالی در موج طولی برابر طول موج است . به طور کلی فاصلهٔ دو نقطهٔ متوالی که دارای وضیت ارتعاشی یکسانی هستند برابر طول موج (λ) است . فاصلهٔ یک قله از درهٔ مجاور یا فاصلهٔ یک تراکم از انبساط مجاور برابر $\frac{\lambda}{2}$ است .



نوع حرکت موج در یک محیط یکنواخت (سرعت ثابت) است . پس می‌توان نوشت :

$$x = vt \xrightarrow{t=T \Rightarrow x=\lambda} \lambda = vT \xrightarrow{f=\frac{1}{T}} v = \lambda f$$

طول موج به بسامد یا دوره (ویژگی منبع موج) و به سرعت انتشار (ویژگی محیط انتشار) موج بستگی دارد.

در یک محیط سرعت انتشار موج با هر بسامد دلخواه مقدار ثابتی است .

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \xrightarrow{v=\text{ثابت}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

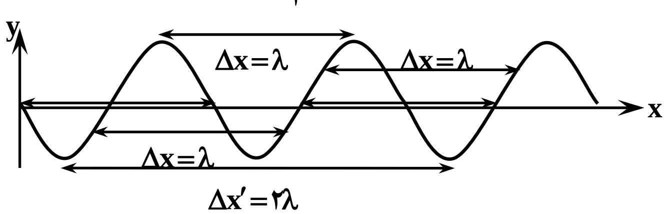
اگر موجی از یک محیط وارد محیط دیگر شود ، تنها بسامد موج ثابت می‌ماند . سرعت و طول موج عوض می‌شود .

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \xrightarrow{f=\text{ثابت}} \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

نقاط هم فاز

نقاطی از محیط انتشار موج که فاصلهٔ آنها از یک‌دیگر مضرب صحیحی از طول موج یا مضرب زوجی از نصف طول موج باشد . هر دو نقطه که دارای مکان و جهت حرکت یکسان در هر لحظه باشند (وضعیت ارتعاشی مشابهی) ، نسبت به یک‌دیگر هم‌فازند . دو قلّه ، دو درّه ، دو انبساط، دو تراکم نسبت به یک‌دیگر هم‌فازند .

$$\Delta x = x_2 - x_1 = n\lambda = 2n\frac{\lambda}{2} \quad , \quad n = 1,2,3,4,...$$



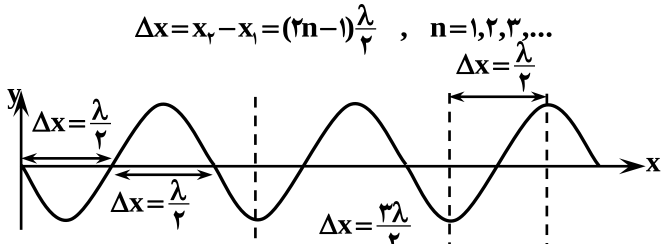
دو نقطهٔ هم فاز در تمام لحظه‌ها با ثابت ماندن بسامد ، هم فاز می‌باشند.

اگر $n=1$ باشد، حداقل فاصلهٔ دو نقطهٔ هم فاز متوالی برابر طول موج (λ) است.

نقاط در فاز مخالف یا متقابل

دو نقطه از موج در محیط که مکان و جهت حرکت آن‌ها قرینهٔ یک‌دیگر باشند ، در فاز مخالف‌اند . نقاطی از محیط انتشار موج که فاصلهٔ آنها از یک‌دیگر مضرب فردی از نصف طول موج باشد ، در فاز مخالف یا فاز متقابلند . قلّه و درّه در موج عرضی ، انبساط و تراکم در موج طولی در فاز مخالفند .

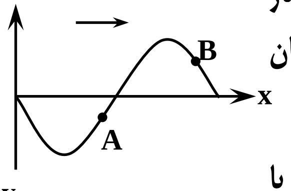
$$\Delta x = x_2 - x_1 = (2n-1)\frac{\lambda}{2} \quad , \quad n = 1,2,3,...$$



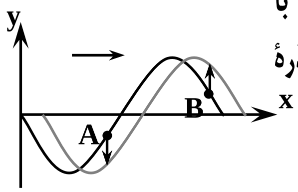
دو نقطه در فاز مخالف در تمام لحظه‌ها با ثابت ماندن بسامد ، در فاز مخالف می‌باشند.

اگر $n=1$ باشد، حداقل فاصلهٔ دو نقطهٔ متوالی در فاز مخالف، $\frac{\lambda}{2}$ است.

شکل روبه‌رو نقش موج عرضی را در یک سیم یا طناب نشان می‌دهد . نقاط A و B دو ذرهٔ محیط می‌باشند. در انتشار موج نقاط محیط با یک بسامد نوسان می‌کنند ولی همراه موج جابه‌جا نمی‌شوند . ذرات محیط در راستای y نوسان کرده ولی موج در راستای x منتشر می‌شود .

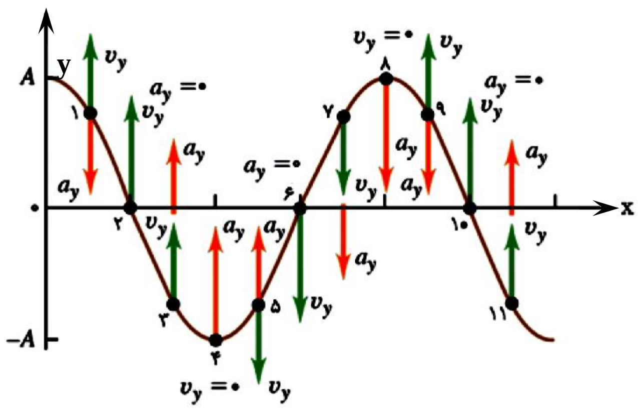


در اثر انتشار موج ، وضعیت هر ذره از محیط پس از مدت کوتاهی شبیه به وضعیت ذرهٔ قبل خود است . یعنی با انتشار موج وضعیت ذرهٔ قبل به ذرهٔ بعدی منتقل می‌شود . در شکل روبه‌رو پس از انتشار موج در جهت محور ذرهٔ A در حال نوسان به سمت پایین و ذرهٔ B در حال نوسان به سمت بالا است .

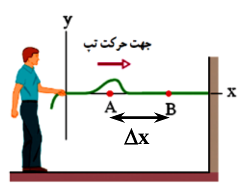


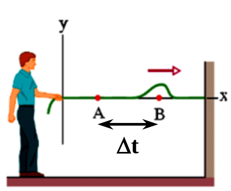
با گذشت زمان، اختلاف فاز بین دو نقطه از موج ثابت می‌ماند.

نوسان منبع در طول محیط موج ایجاد می‌کند.نوسان ذرات محیط هم بسامد با منبع موج است. هر ذره از محیط مانندیک نوسانگر است .
در شکل روبه‌رو وضعیت بردارهای سرعت و شتاب برای ۱۱ ذرهٔ نوسانی از محیط نشان داده شده است . توجه کنید که شتاب a_y در هر نقطه روی طناب با جابه‌جایی y در آن نقطه متناسب است . جایی که انحنای طناب روبه بالاست شتاب رو به بالا و جایی که انحنای طناب رو به پایین است ، شتاب روبه پایین است .در نقاط ۲، ٦ و۱۰ شتاب ذره‌های در حال نوسان صفر و در نقطه‌های ٤ و ۸ سرعت ذرهٔ در حال نوسان صفر است.



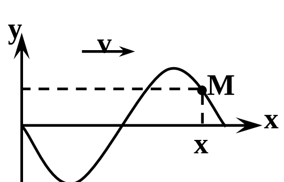
شکل موج در حین انتشار در محیط ، تغییر نمی‌کند . در شکل روبه‌رو با جابه‌جایی موج در محیط شکل موج تغییر نکرده ولی نوسان نقاط مختلف نسبت به یک‌دیگر دارای تأخیر زمانی هستند . نوسان نقطهٔ B نسبت A به اندازهٔ مدت زمانی که موج فاصلهٔ دو نقطه را طی می‌کند ، تأخیر دارد . پس :
تمام ذرات محیط با بسامدی برابر بسامد منبع موج نوسان می‌کنند ، ولی نوسان آن‌ها در جهت انتشار موج دارای تأخیر زمانی می‌باشد . (ویژگی سوم)





تابع موج

چشمهٔ موجی با دامنهٔ A و بسامد f با معادلهٔ $x = A\sin(\omega t)$ نوسان می‌کند . امواج حاصل از این منبع با سرعت ثابت v در محیط منتشر شده و پس از مدت زمان t' از نقطهٔ o به نقطهٔ M می‌رسند . نوسان نقطهٔ M نسبت به منبع (o) به اندازهٔ t' دارای تأخیر زمانی است . می‌خواهیم وضعیت ارتعاشی نقطه M که در فاصلهٔ x از منبع قرار دارد را بررسی کنیم . موج منبع در این نقطه دارای همان بسامد منبع موج بوده ولی نسبت به آن دارای تأخیر زمانی است . مدت زمانی که طول می‌کشد تا موج به نقطهٔ مورد نظر برسد برابر $t' = \frac{x}{v}$ می‌باشد ، پس معادلهٔ موج در این نقطه برابر است با :



$$U_M = A\sin\omega(t - t') \xrightarrow{t' = \frac{x}{v}} U_M = A\sin\frac{2\pi}{T}(t - \frac{x}{v}) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{Tv}x) \xrightarrow{\lambda = vT} U_M = A\sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

$\frac{۲\pi}{\lambda}$ را با k یعنی عدد موج نشان می‌دهند . یکای عدد موج $\frac{rad}{m}$ ($\frac{\text{رادیان}}{\text{متر}}$) است .

پس تابع موج در یک نقطه به فاصلهٔ x از منبع تولید موج برابر است با : $U=A\sin(\omega t-kx)$

پس وقتی موج به یک نقطه به فاصلهٔ x از منبع تولید موج می‌رسد در آن به اندازه‌ی $\Delta\varphi=kx$ اختلاف فاز ایجاد می‌شود . به $(\omega t-kx)$ فاز موج گفته می‌شود . در انتشار موج فاز موج ثابت می‌ماند ، یعنی t و x چنان تغییر می‌کنند که فاز موج ثابت بماند (قله یا دره در حین انتشار در محیط تغییر شکل نمی‌دهند) . اگر انتشار در جهت محور x باشد ، فاز موج $\omega t-kx$ و اگر انتشار در خلاف محور x باشد ، فاز موج $\omega t+kx$ است .

تابع موج طولی یا عرضی به صورت زیر نوشته می‌شود :

موج طولی $\begin{cases} U_x=A\sin(\omega t\pm kx) \\ U_y=A\sin(\omega t\pm ky) \end{cases}$ جهت انتشار موج

راستای ارتعاش ذرات محیط

موج عرضی $\begin{cases} U_y=A\sin(\omega t\pm kx) \\ U_x=A\sin(\omega t\pm ky) \end{cases}$ راستای انتشار موج

رابطهٔ بین عدد موج و بسامد زاویه‌ای به صورت زیر معرفی می‌شود :

$$k=\frac{۲\pi}{\lambda} \xrightarrow{\lambda=vT} k=\frac{۲\pi}{vT} \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}} k=\frac{\omega}{v} \Rightarrow \omega=kv$$

اختلاف فاز بین دو نقطه از محیط به فاصلهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از چشمهٔ موج در هر لحظه (t ثابت) برابر است با :

$$\begin{cases} \varphi_۱=\omega t-kx_۱ \\ \varphi_۲=\omega t-kx_۲ \end{cases} \Rightarrow \Delta\varphi=\varphi_۲-\varphi_۱=\omega t-kx_۲-(\omega t-kx_۱)=-k(x_۲-x_۱) \Rightarrow |\Delta\varphi|=k\Delta x \xrightarrow{k=\frac{\omega}{v}} |\Delta\varphi|=\frac{\omega}{v}\Delta x$$

اگر $\Delta x=۱m$ باشد ، $\Delta\varphi=k$ است . پس :

اختلاف فاز بین دو نقطه به فاصلهٔ ۱m در هر لحظه برابر عدد موج است .

رابطهٔ $\Delta\varphi=k\Delta x$ نشان می‌دهد که اگر Δx ثابت باشد ، $\Delta\varphi$ نیز ثابت می‌ماند . پس :

در انتشار موج در محیط ، اختلاف فاز بین دو نقطه به فاصلهٔ Δx همواره مقدار ثابتی است .

اختلاف فاز بین دو نقطهٔ هم فاز از محیط انتشار موج برابر است با :

$$\Delta\varphi=k\Delta x \xrightarrow{k=\frac{۲\pi}{\lambda}} \Delta\varphi=\frac{۲\pi}{\lambda}\Delta x \xrightarrow{\Delta x=n\lambda} \Delta\varphi=۲n\pi$$

اختلاف فاز مضرب زوجی از π می‌باشد .

اختلاف فاز بین دو نقطه در فاز مخالف از محیط انتشار موج برابر است با :

$$\Delta\varphi=k\Delta x \xrightarrow{k=\frac{۲\pi}{\lambda}} \Delta\varphi=\frac{۲\pi}{\lambda}\Delta x \xrightarrow{\Delta x=(۲n-۱)\frac{\lambda}{۲}} \Delta\varphi=(۲n-۱)\pi$$

اختلاف فاز مضرب فردی از π می‌باشد .

اختلاف فاز ایجاد شده در یک نقطه در بازهٔ زمانی Δt برابر است با :

$$\begin{cases} \varphi_۱=\omega t_۱-kx \\ \varphi_۲=\omega t_۲-kx \end{cases} \Rightarrow \Delta\varphi=\varphi_۲-\varphi_۱=\omega t_۲-kx-(\omega t_۱-kx)=\omega(t_۲-t_۱) \Rightarrow \Delta\varphi=\omega\Delta t$$

اختلاف فاز ایجاد شده در یک نقطه در بازهٔ زمانی ۱ ثانیه برابر بسامد زاویه‌ای است . (تعریف بسامد زاویه‌ای)

$$\begin{cases} \Delta\varphi=۲n\pi \xrightarrow{\Delta\varphi=\omega\Delta t} ۲n\pi=\frac{۲\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t=nT \quad , \quad n=۱,۲,... \\ \Delta\varphi=(۲n-۱)\pi \xrightarrow{\Delta\varphi=\omega\Delta t} (۲n-۱)\pi=\frac{۲\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t=(۲n-۱)\frac{T}{۲} \quad , \quad n=۱,۲,... \end{cases}$$

زمان طی کردن فاصلهٔ دو نقطهٔ هم فاز ، مضربی از دوره است .

زمان طی کردن فاصلهٔ دو نقطهٔ در فاز مخالف ، مضرب فردی از نصف دوره است .

با توجه به اختلاف فاز ایجاد شده می‌توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\varphi=\omega\Delta t \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}} \Delta\varphi=\frac{۲\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{۲\pi}=\frac{\Delta t}{T} \\ \Delta\varphi=k\Delta x \xrightarrow{k=\frac{۲\pi}{\lambda}} \Delta\varphi=\frac{۲\pi}{\lambda}\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{۲\pi}=\frac{\Delta x}{\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{۲\pi}=\frac{\Delta t}{T}=\frac{\Delta x}{\lambda}$$

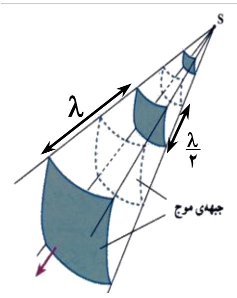
یعنی : *با گذشت زمانی به اندازه یک دوره، موج به اندازه یک طول موج جابه جا شده و اختلاف فاز ایجاد شده برابر 2π rad است .*

دورهٔ تناوب توابع سینوسی و کسینوسی مضربی از 2π است ، پس با حذف مضاربی از 2π تغییری در موج ایجاد نمی‌شود . پس در تعیین فاصلهٔ بین دو نقطه اگر مضاربی از λ را حذف کنیم تغییری در تابع موج ایجاد نمی‌شود . در نتیجه در رابطه‌ی $\Delta\varphi=k\Delta x$ منظور از Δx کم‌ترین فاصلهٔ بین دو نقطه است .

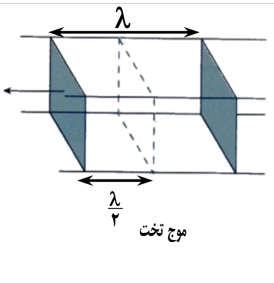
به ازای هر نقطهٔ هم فاز ، فاصله به اندازهٔ λ افزایش می‌یابد . $\Delta x'=\Delta x+n\lambda$ (n تعداد نقاط هم فاز است .)

انتشار امواج در دو و سه بعد

اگر توسط یک سوزن که به انتهای دیاپازونی متصل است ضربه‌هایی در راستای قائم بر سطح آب وارد کنیم ، امواج ایجاد شده به صورت دایره‌های هم مرکز دور می‌شوند . این دایره‌ها را جبهۀ موج گویند . جبهۀ موج مکان هندسی نقاطی از محیط است که در آن نقاط تابع موج دارای فاز یکسانی است . پس اختلاف فاز نقاط واقع بر روی یک جبهۀ موج صفر است . انتشار موج د ر دو بُعد شامل بی‌شمار انتشار موج در یک بُعد است . در این امواج دایره‌ای فاصلۀ دو برجستگی متوالی و دو فرورفتگی متوالی λ و فاصلۀ یک برآمدگی از فرورفتگی مجاور $\frac{\lambda}{2}$ است . جبهۀ موج در سه بُعد به صورت کره‌های هم مرکز می‌باشد (مانند جبهه‌های موج حاصل از منبع صوتی نقطه‌ای) . در فاصلۀ زیاد از منبع جبهه‌های موج به صورت صفحه‌های موازی در می‌آیند ، این امواج را موج تخت گویند . خط عمود بر جبهۀ موج راستای انتشار را مشخص می کند .



موج کروی



موج حامل انرژی است (ویژگی چهارم) .

موج انرژی را از یک نقطه به نقطۀ دیگر منتقل می کند . انرژی که توسط موج منتقل می‌شود همان انرژی مکانیکی نوسانگر منبع موج است . با این تفاوت که جرم محیط جرم طناب است .

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \xrightarrow{\omega=2\pi f} E=2\pi^2mA^2f^2$$

انرژی که توسط موج حمل می‌شود با مجذور دامنه و مجذور بسامد نسبت مستقیم دارد . $E\propto A^2 \ , \ E\propto f^2$

توان متوسط نوسانگری با بسامد f که در طنابی به جرم واحد طول صفحه منهٔ A ایجاد می کند ، برابر است با :

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \xrightarrow{\omega=2\pi f} E=2\pi^2mA^2f^2 \xrightarrow{\mu=\frac{m}{L} \Rightarrow m=\mu L} E=2\pi^2\mu LA^2f^2 \xrightarrow{L=vt \ , \ v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}} E=2\pi^2\mu\times\sqrt{\frac{F}{\mu}}t\times A^2f^2$$

$$\overline{P}=\frac{E}{t}=2\pi^2A^2f^2\sqrt{\mu F}$$

متوسط توانی که توسط موج منتقل می‌شود با مجذور دامنه و مجذور بسامد نسبت مستقیم دارد . $\overline{P}\propto A^2 \ , \ \overline{P}\propto f^2$

انرژی موج در طناب به طول λ برابر است با :

$$E=2\pi^2mA^2f^2 \xrightarrow{m=\mu L=\mu\lambda} E=2\pi^2\mu\lambda f^2A^2=2\pi^2\mu(\lambda f)fA^2 \xrightarrow{v=\lambda f} E=2\pi^2\mu vfA^2$$

انرژی موج در طنابی به طول λ متناسب با بسامد و مجذور دامنه است . $E\propto f \ , \ E\propto A^2$

تمام روابط انرژی و توان برای همۀ موج های سینوسی صادق می باشد.

وقتی موج به مرز جدایی دو محیط می‌رسد ، بخشی از انرژی آن وارد محیط دوّم شده و بقیّهٔ انرژی به محیط اوّل برمی‌گردد . برای بررسی پدیدهٔ بازتاب باید :

اولاً : تمام انرژی موج در مرز جدایی دو محیط بازتاب شده و به محیط اوّل برگردد .

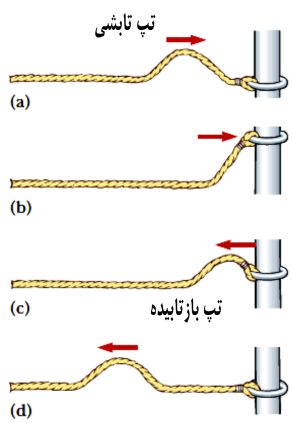
ثانیاً : اصطکاک ناچیز بوده و انرژی موج تلف نشود .

بازتاب موج

هنگامی که موج به مرز جدایی دو محیط می‌رسد ، چگونگی بازتاب موج به شرایط مرزی دو محیط بستگی دارد . در کتاب درسی بازتاب از انتهای آزاد و انتهای ثابت بررسی شده است .

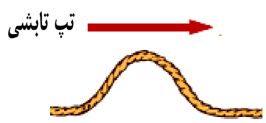
الف: بازتاب از انتهای آزاد یا باز (مانع نرم)

انتهای باز ، حلقه‌ای است که روی میله‌ای بدون اصطکاک بالا و پائین می‌رود . هنگامی که در یک محیط آشفتگی ایجاد می‌شود ، وقتی این آشفتگی به هر نقطه از محیط می‌رسد آنرا به اندازهٔ دامنه از وضع تعادل خارج کرده تا از آن نقطه می‌گذرد .

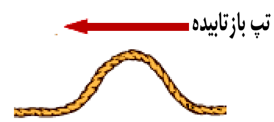


وقتی آشفتگی یا تَپ به انتهای آزاد می‌رسد ، دامنهٔ آن دو برابر شده و موج بدون تغییر در جهت دامنه برمی‌گردد . در انتهای آزاد برجستگی و فرورفتگی به همان صورت تابیده شده ، برمی‌گردند . انتهای آزاد مانند چشمهٔ موجی است که همان موج تابشی را در خلاف جهت اولیه ، تولید می‌کند .

در بازتاب از انتهای آزاد تغییر فازی در موج ایجاد نشده و تنها جهت انتشار موج عوض می‌شود .



$U=A\sin(\omega t-kx)$

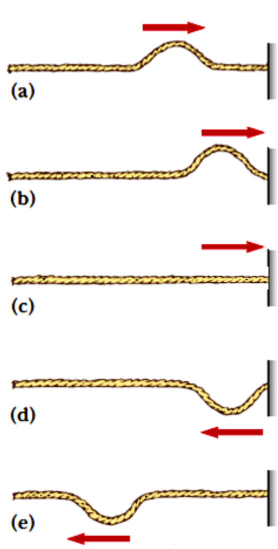


$U=A\sin(\omega t+kx)$

موج بازتابیده شده از انتهای آزاد قرینهٔ موج تابشی نسبت به محور قائم است.

اگر تابع موج در نقطهٔ A به فاصلهٔ x از مانع باز به صورت $U_A=A\sin(\omega t)$ باشد ، وقتی موج به مانع می‌رسد تابع آن به صورت $U_A=A\sin(\omega t-kx)$ درمی‌آید . هنگامی که موج بازتابیده دوباره به نقطهٔ A می‌رسد ، دارای تابع $U_A=A\sin(\omega t+kx)$ است . پس اختلاف فاز موج تابشی و بازتاب آن در نقطهٔ A برابر است با :

$$\Delta\varphi=\omega t+kx-(\omega t-kx)=۲kx$$

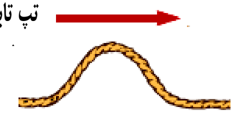


ب: بازتاب از انتهای ثابت یا بسته (مانع سخت)

در نظر بگیرید که یک آشفتگی یا تَپ در طول طنابی که انتهای آن به دیواری ثابت شده است ، در حال انتشار است . در انتشار آشفتگی یا تَپ در طول طناب وقتی تَپ به هر نقطهٔ محیط می‌رسد بر آن نیرویی در راستای قائم به طرف بالا وارد نموده آن را به اندازهٔ دامنه از وضع تعادل خارج کرده تا از آن نقطه عبور کند . وقتی تَپ به مانع ثابت می‌رسد بر آن نیرویی در راستای قائم به طرف بالا وارد نموده و چون انرژی لازم برای جابه‌جایی مانع را ندارد طبق قانون سوّم نیوتن از طرف مانع همان نیرو در راستای قائم به طرف پائین بر طناب وارد می‌کند ، پس با عوض شدن جهت دامنه ، موج برمی‌گردد .

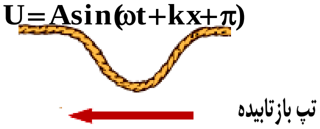
پس بیـن موج تابشی و بـازتاب آن از روی مانع ثابت π رادیان اختلاف فاز ایجاد می‌شود .

در بازتاب از انتهای ثابت علاوه بر تغییر در جهت انتشار موج به علت عوض شدن جهت دامنه ، πrad اختلاف فاز در آن ایجاد می‌شود .



$U=A\sin(\omega t-kx)$

$U=A\sin(\omega t+kx+\pi)$



موج بازتابیده شده از انتهای ثابت یا بستهٔ قرینهٔ موج تابشی نسبت به دو محور افق و محور قائم است.

اگر تابع موج در نقطهٔ A به فاصلهٔ x از مانع باز به صورت $U_A=A\sin(\omega t)$ باشد ، وقتی موج به مانع می‌رسد تابع آن به صورت $U_A=A\sin(\omega t-kx)$ درمی‌آید . هنگامی که موج بازتابیده دوباره به نقطهٔ A می‌رسد ، دارای تابع $U_A=A\sin(\omega t+kx+\pi)$ است . پس اختلاف فاز موج تابشی و بازتاب آن در نقطهٔ A برابر است با :

$$\Delta\varphi=\omega t+kx+\pi-(\omega t-kx)=2kx+\pi$$

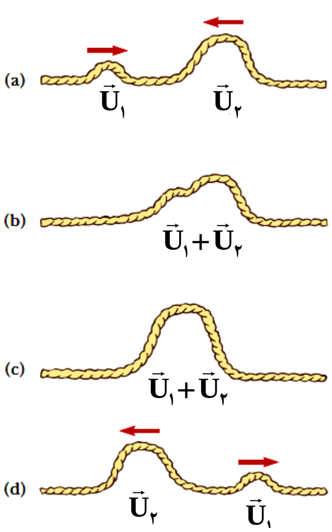
اصل برهم نهی امواج

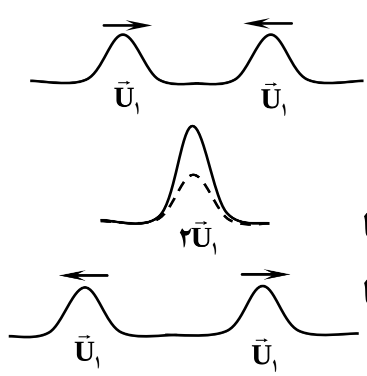
هر موج در حال انتشار ، بدون آن که برای انتشار سایر موج‌ها مزاحمتی ایجاد کند ، از آن‌ها عبور کرده و به انتشار خود ادامه می‌دهد ، درست مانند آن‌که هیچ موج دیگری در محیط منتشر نمی‌شود . در نقطه‌ای که دو یا چند موج با هم تلاقی می‌کنند ، جابه‌جایی ذرّه‌ای از محیط که در آن نقطه است ، برابر برآیند جابه‌جایی‌های حاصل از هر یک از موج‌ها است . اگر بردار جابه‌جایی را برای هر یک از موج‌ها به صورت $\vec{U}_1,\vec{U}_2,...$ در نظر بگیریم ، برهم‌نهی به صورت روبه‌رو معرفی می‌شود :

$$\vec{U}=\vec{U}_1+\vec{U}_2+\vec{U}_3+...$$

حالت‌های خاص ، که دو موج در یک نقطه به یک‌دیگر می‌رسند ، به صورت زیر است :

۱- دو موج هم فاز به یک نقطه برسند :



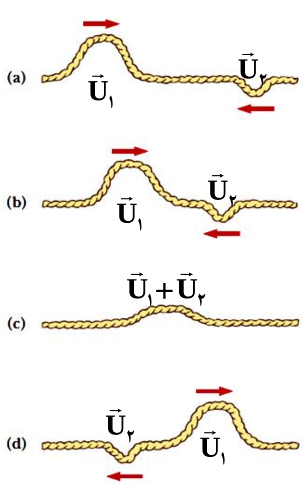


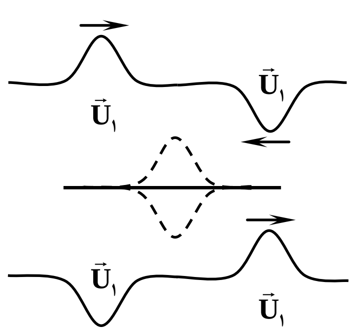
$$\theta=0 \Rightarrow U=U_1+U_2$$

$$U_1=U_2 \Rightarrow U=2U_1$$

در نقاطی که تَپ‌ها هم‌جهت‌اند *برهم نهی سازنده* بوده و برآیند آنها برابر مجموع اندازه‌ی جابه‌جایی‌های حاصل از هر یک از آن‌ها است .

۲- دو موج در فاز مخالف به یک نقطه برسند :



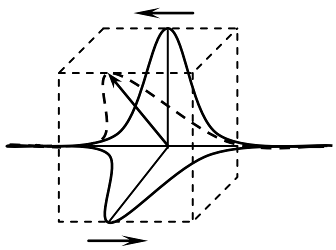


$$\theta=180^\circ \Rightarrow U=U_1-U_2$$

$$U_1=U_2 \Rightarrow U=0$$

در نقاطی که تَپ‌ها خلاف جهت یک‌دیگرند ، *برهم نهی ویرانگر* بوده و جابه‌جایی برآیند برابر تفاضل اندازه‌ی جابه‌جایی‌های حاصل از هر یک از آن‌ها است .

۳- دو موج در راستای عمود بر هم به یک نقطه برسند :



$$\theta=90^\circ \Rightarrow U=\sqrt{U_1^2+U_2^2}$$

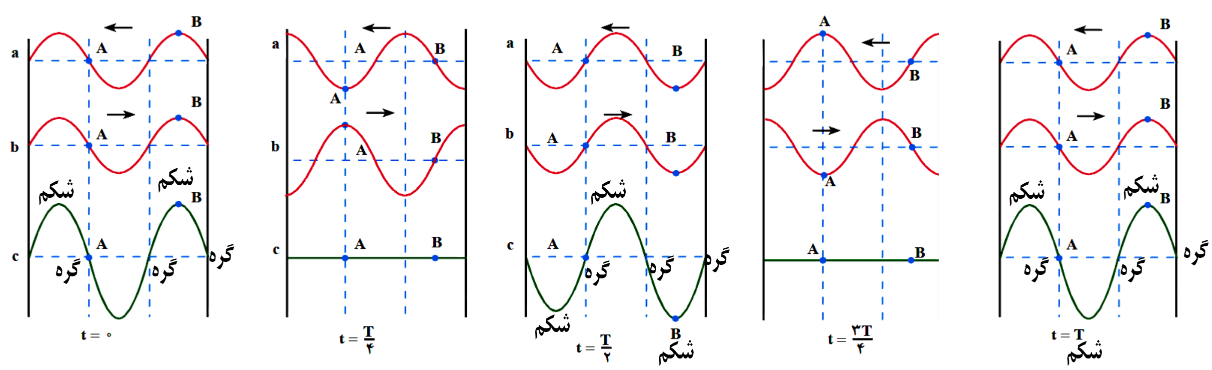
$$U_1=U_2 \Rightarrow U=\sqrt{2}U_1$$

تذکر: در انتهای ثابت اختلاف فاز بین موج تابشی و بازتاب آن روی مانع πrad است . یعنی روی این مانع دو موج در فاز مخالف‌اند ، پس برهم نهی آن‌ها ویرانگر بوده و دامنهٔ ارتعاش صفر است . در انتهای آزاد اختلاف فاز بین موج تابشی و بازتاب آن روی مانع صفراست . یعنی روی این مانع دو موج در هم فازاند ، پس برهم نهی آن‌ها سازنده بوده و دامنهٔ ارتعاش ۲A است .

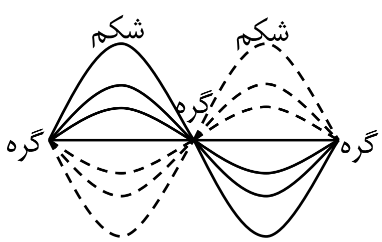
برهم نهی امواج در یک بعد، امواج ایستاده

حاصل برهم نهی دو موج هم دامنه و هم بسامد که در خلاف جهت یک‌دیگر در طول یک طناب منتشر می‌شوند ، را موج ایستاده گویند . اگر دو موجی که با هم به یک نقطه از محیط می‌رسند هم فاز باشند ، برهم نهی آنها سازنده بوده و این نقطه دارای بیش‌ترین دامنهٔ ارتعاش می‌باشد، در این نقطه شکم تشکیل می‌شود . اگر دو موجی که با هم به یک نقطه از محیط می‌رسند در فاز مخالف باشند ، برهم نهی آنها ویرانگر بوده و دامنهٔ ارتعاش این نقطه صفر می‌باشد ، در این نقطه گره تشکیل می‌شود . امواج ایستاده را می‌توان از گره و شکم‌های متوالی آن شناخت .

در شکل زیر روی یک طناب دو موج هم داونه و هم بسامد به سمت یک‌دیگر در حرکت‌اند . حاصل برهم نهی آن‌ها در بازهٔ زمانی $\Delta t=\frac{T}{4}$ نشان داده شده است : (حاصل برهم نهی شکل‌های a و b در شکل c دیده می‌شود)



در شکل‌های سری c به جای دو موج ، برهم‌نهی آن‌ها دیده می‌شود . اگر شکل‌های c را در کنار یک‌دیگر قرار دهیم ، شکل موج ایستاده در لحظه‌های مختلف به دست می‌آید .



در موج ایستاده پیشروی در محیط دیده نمی‌شود ، تنها ذرات محیط نوسان می‌کنند .

در موج ایستاده :

۱- دامنهٔ نوسان نقاط محیط یکسان نمی‌باشد . دامنهٔ نوسان در گره برابر صفر و در شکم بیشینه (۲A) است .

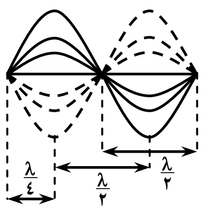
۲- امواج ایستاده دارای انرژی بوده ولی انرژی را منتقل نمی‌کنند .

۳- بسامد نوسان تمام نقاط محیط یکسان بوده و برابر بسامد موج‌های سازندهٔ آن است .

٤- طول موج امواج ایستاده همان طول موج موج‌های سازندهٔ آن است .

۵- امواج ایستاده در محیط‌های جامد (طناب یا سیم) و مایع (سطح آب) و گاز (هوای درون لوله‌های صوتی) ایجاد می‌شوند .

٦- فاصلهٔ دو گره یا دو شکم متوالی $\frac{\lambda}{2}$ و فاصلهٔ یک گره از شکم مجاورش $\frac{\lambda}{4}$ است .



۷- تمام نقاط واقع بین دو گرهٔ متوالی هم فازند . یعنی این نقاط با هم به بیشینهٔ بُعد خود و با هم به صفر می‌رسند . نقاط واقع بین دو گره نسبت به هم دارای فاز یکسانی بوده ولی نسبت به دو گرهٔ متوالی مجاور در فاز مخالف‌اند .

۸- نقاط بین دو شکم متوالی در فاز مخالف‌اند .

یکی از روش‌های ایجاد دو موج هم دامنه و هم بسامد که در خلاف جهت یکدیگر در یک محیط منتشر شوند، تابش و بازتاب از انتهای ثابت یا آزاد است. از برهم نهی موج تابشی و بازتاب آن از انتهای ثابت یا آزاد موج ایستاده ایجاد می‌شود.

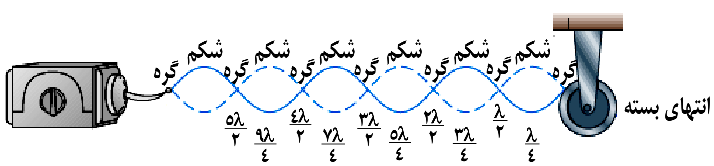
روی انتهای ثابت موج تابشی و بازتاب آن در فاز مخالف $[\Delta\varphi=(2n-1)\pi]$ بوده و برهم‌نهی ویرانگر است ،پس گره ایجاد می‌شود . روی انتهای آزاد موج تابشی و بازتاب آن هم فاز $[\Delta\varphi=2n\pi]$ بوده و برهم‌نهی سازنده است ، پس شکم ایجاد می‌شود .

برهم‌نهی موج تابشی و بازتاب آن از انتهای ثابت ، تولید موج ایستاده کرده که روی انتهای بسته گره ایجاد می‌شود . مکان گره و شکم‌ها در این حالت به صورت زیر به دست می‌آید :

اختلاف فاز بین موج تابشی و بازتاب آن از انتهای بسته در فاصلهٔ x از مانع برابر $\Delta\varphi=\omega t+kx+\pi-(\omega t-kx)=2kx+\pi$ می‌باشد . در محل گره دو موج در فاز مخالف $[\Delta\varphi=(2n+1)\pi]$ و در محل شکم دو موج هم فازاند $[\Delta\varphi=2n\pi]$.

$\Delta\varphi=2kx+\pi=(2n+1)\pi \Rightarrow 2\times\frac{2\pi}{\lambda}x+\pi=2n\pi+\pi \Rightarrow x=n\frac{\lambda}{2} \quad , \quad n=1,2,3,...$ محل گره‌ها

$\Delta\varphi=2kx+\pi=2n\pi \Rightarrow 2\times\frac{2\pi}{\lambda}x+\pi=2n\pi \Rightarrow x=(2n-1)\frac{\lambda}{4} \quad , \quad n=1,2,3,...$ محل شکم‌ها

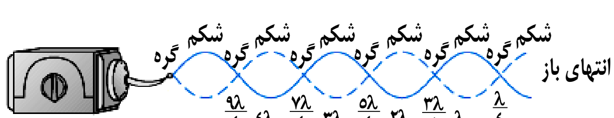


برهم‌نهی موج تابشی و بازتاب آن از انتهای باز (آزد) ، تولید موج ایستاده کرده که روی انتهای باز شکم ایجاد می‌شود . مکان گره و شکم‌ها در این حالت به صورت زیر به دست می‌آید :

اختلاف فاز بین موج تابشی و بازتاب آن از انتهای بار در فاصلهٔ x از مانع برابر $\Delta\varphi=\omega t+kx+-(\omega t-kx)=2kx$ می‌باشد . در محل گره دو موج در فاز مخالف $[\Delta\varphi=(2n-1)\pi]$ و در محل شکم دو موج هم فازاند $[\Delta\varphi=2n\pi]$.

$\Delta\varphi=2kx=(2n-1)\pi \Rightarrow 2\times\frac{2\pi}{\lambda}x=(2n-1)\pi \Rightarrow x=(2n-1)\frac{\lambda}{4} \quad , \quad n=1,2,3,...$ محل گره‌ها

$\Delta\varphi=2kx=2n\pi \Rightarrow 2\times\frac{2\pi}{\lambda}x=2n\pi \Rightarrow x=n\frac{\lambda}{2} \quad , \quad n=1,2,3,...$ محل شکم‌ها

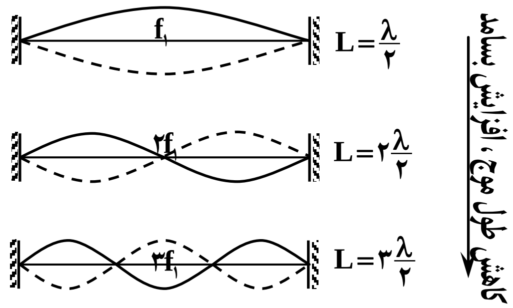


در اثر زدن ضربات متناوب به یک طناب یا تاری که بین دو نقطه ثابت شده است ، در طول آن موج‌های سینوسی چنان ایجاد می‌شود که حاصل برهم‌نهی آن‌ها موج ایستاده می‌دهد . چون انتهای ثابت نمی‌تواند نوسان کند ، در دو انتهای طناب همواره گره ایجاد می‌شود . در اثر ایجاد موج ایستاده و به نوسان درآمدن محیط اطراف طناب یا تار ، صوت تولید می‌شود . بسامد صوت حاصل از ارتعاشات تار به صورت زیر محاسبه می‌شود . در شکل‌های زیر وضعیت ارتعاشی طناب در حالت‌های مختلف نشان داده شده است .

بسامد اوّل (صوت اصلی) هماهنگ اوّل

بسامد دوّم (صوت دوّم) هماهنگ دوّم

بسامد سوّم (صوت سوّم) هماهنگ سوّم



$$f=\frac{v}{\lambda}\xrightarrow{\lambda=\frac{2L}{n}} f_n=\frac{nv}{2L}\xrightarrow{v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}} f_n=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$n=1,2,3,...$

بسامد n ام (صوت n ام) هماهنگ n ام $L=n\frac{\lambda}{2}\ \Rightarrow\ \lambda=\frac{2L}{n}$

طول طناب (تار) مضرب صحیحی از نصف طول موج است .

کوتاه‌ترین طول طناب یا بم‌ترین صوت تولیدی مربوط به صوت اصلی است .

در تار (طناب) تمام هماهنگ‌های زوج و فرد تولید می‌شود . بسامد صوت تولیدی مضرب صحیحی از بسامد صوت اصلی است .

$$f_1=\frac{v}{\lambda_1}\xrightarrow{\lambda_1=2L} f_1=\frac{v}{2L}\quad,\quad f_n=\frac{nv}{2L}\ \Rightarrow\ f_n=nf_1$$

نسبت بسامد صوت تولیدی به بسامد صوت اصلی را شمارهٔ هماهنگ یا هارمونی گویند . $n=\frac{f_n}{f_1}$ شماره‌ی هماهنگ

تفاوت بسامد دو صوت متوالی برابر بسامد صوت اصلی است . $f_n-f_{n-1}=f_1$

با افزایش شمارهٔ هماهنگ طول موج کوتاه‌تر شده در نتیجه بسامد صوت تولیدی بیش‌تر (صدا زیرتر) می‌شود .

تمام عوامل موثر در سرعت انتشار موج در یک محیط همگن در بسامد صوت تولیدی توسط تار نیز موثرند .

سرعت انتشار موج در یک تار ، مقدار ثابتی بوده و به شمارهٔ هماهنگ‌های تولیدی بستگی ندارد .

عوامل موثر در بسامد صوت تولیدی توسط تار مرتعش

۱- شماره‌ی هماهنگ $f\propto n$ ۲- طول تار مرتعش $f\propto\frac{1}{L}$ ۳- سرعت انتشار موج در تار $f\propto v$

٤- نیروی کشش تار $f\propto\sqrt{F}$ ۵- جرم واحد طول تار $f\propto\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ٦- قطر سطح مقطع تار $f\propto\frac{1}{D}$

۷- جنس سیم تار $f\propto\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ ۸- اندازه‌ی سطح مقطع سیم $f\propto\frac{1}{\sqrt{A}}$

$$f_n=\frac{nv}{2L}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{A\rho}}=\frac{n}{LD}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

n شماره صوت و شماره‌ی هماهنگ و تعداد شکم‌ها و یکی کم‌تر از تعداد گره‌ها می‌باشد .

در هم صدایی یا تشدید یا هم ارتفاعی دو صوت ، بسامد آن دو صوت برابر است .

طول موج ارتعاشات تنها به طول تار و شمارهٔ هماهنگ بستگی دارد .

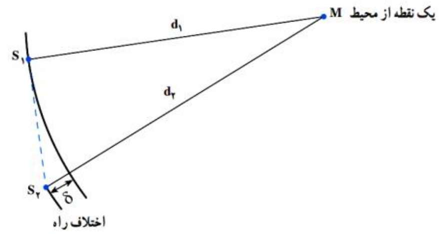
نسبت بسامد ارتعاشات دو صوت تولیدی توسط دو منبع موج برابر است با : $\frac{f'}{f}=\frac{n'}{n}\times\frac{L}{L'}\times\frac{v'}{v}=\frac{n'}{n}\times\frac{L}{L'}\times\sqrt{\frac{F'}{F}\times\frac{\mu}{\mu'}}$

برهم نهی موج‌ها در دو بعد (تداخل امواج در سطح آب)

اگر به انتهای یک دیاپازون دو سوزن یکسان متصل نموده و دیاپازون را به ارتعاش درآوریم ، دو منبع موج هم دامنه و هم بسامد و هم فاز بوجود آورده‌ایم . اگر دو منبع هم دامنه و هم بسامد و هم فاز با هم در یک محیط شروع به نوسان کنند ، امواج حاصل علاوه بر پیشروی در محیط برهم نهی نیز ایجاد نموده ، که به حاصل برهم نهی آنها تداخل امواج گویند . اگر دو موج هم فاز با هم به یک نقطه از محیط برسند دو موج در آن نقطه برهم نهی سازنده داشته ، شکم ایجاد می‌شود . اگر دو موج در فاز مخالف با هم به یک نقطه از محیط برسند برهم نهی در آن نقطه ویرانگر بوده ، گره ایجاد می‌شود . ***شرط ایجاد تداخل امواج ، دو چشمهٔ موج هم دامنه و هم بسامد و هم فاز است .***

تحلیل ریاضی تداخل امواج

مطابق شکل نقطهٔ M از محیط انتشار از دو منبع موج $S_۱$ و $S_۲$ به ترتیب دارای فواصل $d_۱$ و $d_۲$ می‌باشد . اگر معادله نوسان دو چشمهٔ موج $S_۱$ و $S_۲$ به صورت $U=A\sin\omega t$ باشد ، اختلاف فاز دو موجی که با هم به نقطه‌ی M می‌رسند برابر است با:



$$\begin{cases}\varphi_۱=\omega t-\frac{۲\pi}{\lambda}d_۱\\ \varphi_۲=\omega t-\frac{۲\pi}{\lambda}d_۲\end{cases} \Rightarrow \quad |\Delta\varphi|=|\varphi_۲-\varphi_۱|=\frac{۲\pi}{\lambda}(d_۲-d_۱)=\frac{۲\pi}{\lambda}\delta$$

در این رابطه $\delta=d_۲-d_۱$ اختلاف راه نقطهٔ M از دو چشمهٔ موج است . رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که ***اختلاف فاز دو موجی که با هم به یک نقطه می‌رسند به اختلاف راه آن نقطه تا دو منبع موج بستگی دارد .*** وضعیت نوسانی نقطهٔ M به اختلاف فاز دو موجی که به آن نقطه می‌رسند ، بستگی دارد .

الف : اگر اختلاف فاز مضرب زوجی از π یا مضربی از ۲π باشد ، دو موج در آن نقطه هم فاز بوده برهم نهی آنها سازنده بوده دامنه نوسان بیشینه بوده و در آن نقطه شکم ایجاد می‌شود .

$$\Delta\varphi=k\delta=۲n\pi \quad\Rightarrow\quad \frac{۲\pi}{\lambda}\delta=۲n\pi \quad\Rightarrow\quad \delta=n\lambda=۲n\frac{\lambda}{۲} \quad , \quad n=۰,۱,۲,۳,....$$

نقاطی از محیط که اختلاف راه آنها از دو چشمه ی موج ، مضربی از طول موج یا مضرب زوجی از نصف طول موج است ، در هر لحظه دو موج هم فاز دریافت کرده برهم نهی دو موج سازنده بوده (شکم) و این نقاط با بیش ترین دامنه نوسان می کنند .

ب : اگر اختلاف فاز مضرب فردی از π باشد ، دو موج در آن نقطه در فاز مخالف بوده برهم نهی آنها ویرانگر بوده دامنه نوسان صفر بوده و در آن نقطه گره ایجاد می‌شود .

$$\Delta\varphi=k\delta=(۲n-۱)\pi \quad\Rightarrow\quad \frac{۲\pi}{\lambda}\delta=(۲n-۱)\pi \quad\Rightarrow\quad \delta=(۲n-۱)\frac{\lambda}{۲} \quad , \quad n=۱,۲,۳,....$$

نقاطی از محیط که اختلاف راه آنها از دو چشمه ی موج ، مضرب فردی از نصف طول موج است ، در هر لحظه دو موج در فاز مخالف دریافت کرده برهم نهی دو موج ویرانگر بوده (گره) و دامنه ارتعاش این نقاط صفر است .